

# INDUZIONI

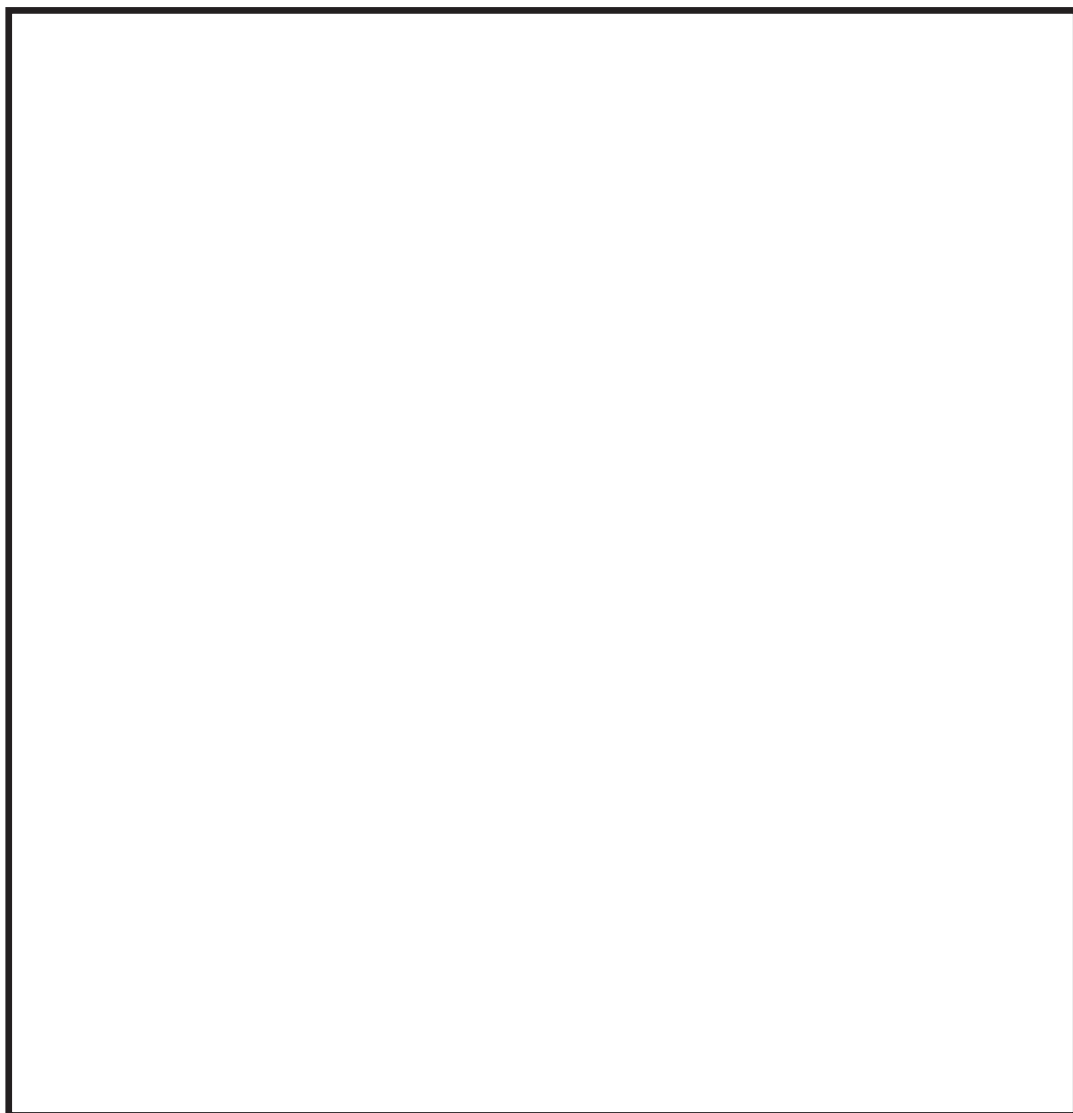
Demografia, probabilità, statistica  
a scuola

34 · 2007



Fabrizio Serra · Editore

Pisa · Roma



# INDUZIONI

- INDUZIONI è una rivista rivolta agli studenti ed ai docenti di matematica, storia, geografia, osservazioni scientifiche, economia, statistica... delle scuole preuniversitarie, ma anche ai docenti universitari. Il suo scopo è quello di diffondere idee statistiche nella scuola e di illustrare attraverso esempi come la statistica possa essere di ausilio in diverse occasioni della vita pratica.

Il taglio degli articoli dovrebbe essere operativo ed effettivamente utilizzabile nel lavoro scolastico.

- INDUZIONI viene pubblicata con il patrocinio della Società Italiana di Statistica (S.I.S.).

- Comitato scientifico: Giuseppe Burgio, Giuseppe Cicchitelli, Giuseppe De Bartolo, Antonella Pinnelli, Silio Rigatti Luchini, Livia Linda Rondini, Carla Rossi, Romano Scozzafava, Alberto Zuliani.

- Fondatore: † Enzo Lombardo.

- Direttore: Maria Gabriella Ottaviani.

- Comitato di redazione: Mario Barra, Anna Maria Birindelli, Giulianella Coletti, Corrado Crocetta, Ornella Giambalvo, Maria Pannone, Isabella Santini, Maria Rita Sebastiani.

Il Direttore e il Comitato di redazione della rivista ringraziano gli esperti esterni che, con la lettura critica e costruttiva degli articoli sottoposti per la pubblicazione, hanno contribuito alla qualità di «Induzioni».

# INDUZIONI

Demografia, probabilità, statistica  
a scuola

34 · 2007



Fabrizio Serra · Editore

Pisa · Roma

Amministrazione e abbonamenti:  
Accademia editoriale®  
Casella postale n. 1 Succ. n. 8 · I 56123 Pisa

Prezzi di abbonamento (2007):  
Italia: Euro 65,00 (ridotto per soci di società scientifiche ed insegnanti,  
specificando la propria condizione nella richiesta di abbonamento)  
Euro 145,00 (enti, con edizione *Online*)  
*Abroad*: Euro 145,00 (*Individuals*) · Euro 195,00 (*Institutions, with Online Edition*)

Cumulativo sostenitore: € 1.200,00, dà diritto a ricevere 35 copie  
di ogni numero della rivista.

Prezzo del fascicolo singolo Euro 80,00

Modalità di pagamento: su c/c postale n. 17154550 intestato a  
Accademia editoriale · Casella postale n. 1 Succ. n. 8 · I 56123 Pisa;  
mediante carta di credito American Express, Eurocard, Mastercard, Visa.  
Tel. 050 542332 · Fax 050 574888 · e-mail: iepi@iepi.it

[www.libraweb.net](http://www.libraweb.net)

*Direttore responsabile*: Lucia Corsi.  
Autorizzazione del Tribunale di Pisa n. 8 del 2.5.1994.

★

La Casa editrice garantisce la massima riservatezza dei dati forniti dagli abbonati e la possibilità di richiederne la rettifica o la cancellazione previa comunicazione alla medesima. Le informazioni custodite dalla Casa editrice verranno utilizzate al solo scopo di inviare agli abbonati nuove proposte (Dlgs. 196/2003).

Sono rigorosamente vietati la riproduzione, la traduzione, l'adattamento, anche parziale o per estratti, per qualsiasi uso e con qualsiasi mezzo effettuati, compresi la copia fotostatica, il microfilm, la memorizzazione elettronica, ecc., senza la preventiva autorizzazione scritta della *Fabrizio Serra · Editore*®, Pisa · Roma, un marchio della *Accademia editoriale*®, Pisa · Roma. Ogni abuso sarà perseguito a norma di legge.

Proprietà riservata · All rights reserved  
© Copyright 2008 by  
*Fabrizio Serra · Editore*®, Pisa · Roma,  
un marchio della *Accademia editoriale*®, Pisa · Roma

ISSN 1120-690X  
ISSN ELETTRONICO 1724-0476

## SOMMARIO / CONTENTS

MARIO BARRA, <i>Bruno de Finetti, un matematico geniale al servizio della società (seconda parte) / Bruno de Finetti, a mathematician of genius in service of society (II)</i>	9
ANGELA MARTINI, ROBERTO RICCI, <i>I risultati PISA 2003 degli studenti italiani in matematica: un'analisi multilivello per tipologia di scuola secondaria / PISA2003 Mathematical performance of Italian students: multilevel analysis for each secondary school category</i>	25
ENRICA AURELI, DOMENICA FIOREDISTELLA IEZZI, <i>Saperi minimi ed accesso all'Università: l'esperienza del polo scientifico e tecnologico della "Sapienza" / Basic knowledge and University enrollment: the case of "Sapienza" scientific and technological network</i>	47
IN ONORE DI ENZO LOMBARDO / IN HONOUR OF ENZO LOMBARDO	
ADRIANA CONTI PUORGER, MARIA RITA SEBASTIANI, <i>Giornata in onore di Enzo Lombardo / In honour of Enzo Lombardo</i>	57
GRAZIELLA CASELLI, ENZO LOMBARDO, <i>Grafici e analisi dei fenomeni demografici / Graphs and analysis of demographic phenomena</i>	69
ESPERIENZE E MATERIALI / MATERIALS AND METHODS	
DONATA MARASINI, <i>La Statistica: una disciplina da scoprire / Statistics: a discipline to be discovered</i>	79
MARIO DI BACCO, PATRIZIO FREDERIC, <i>Con chi vuoi volare? / Which company would you like to fly with?</i>	87
VINCENZO CATALDO, <i>Statisticamente parlando ... Riflessioni su un'esperienza didattica in un liceo scientifico romano / Statistically speaking: Consideration of a mathematics teacher on a didactic experience in a Roman lyceum</i>	95
GRAZIA LAGANÀ, MARINELLA GIOIA, ELENA BIANCO, <i>Un'esperienza lunga cinque anni / A five years long experience</i>	113
ATTIVITÀ IN CAMPO DIDATTICO / TRAINING ACTIVITIES	
SILIO RIGATTI LUCHINI, MARIA PIA PERELLI D'ARGENZIO, <i>La statistica nella scuola di base: un'esperienza a Salvador (Bahia - Brasile) / Teaching statistics in primary and lower secondary school: an experience in Salvador (Bahia - Brazil)</i>	123
QUADRANTE NAZIONALE ED INTERNAZIONALE NATIONAL AND INTERNATIONAL NEWS	
<i>Competenze chiave per l'apprendimento permanente in Europa e per il primo ciclo d'istruzione della scuola italiana / Key competences for long life learning in the European Union and for the first cycle of education in the Italian School System</i>	135
<i>Gara internazionale di statistica per studenti dai 10 ai 18 anni / International Literacy Statistical Project</i>	145

## LO SCAFFALE DEI LETTORI / BOOK REVIEWS

- ISTITUTO REGIONALE DI RICERCA EDUCATIVA PER IL LAZIO, *Opinioni comportamenti ed aspettative delle famiglie sul sistema scolastico italiano. Ricerca nazionale, Rilevazione 2005-6*, a cura di Anna Lombardi (Giuseppe Bove, Giovanni Moretti) 151

BRUNO DE FINETTI,  
UN MATEMATICO GENIALE  
AL SERVIZIO DELLA SOCIETÀ  
(SECONDA PARTE)\*

MARIO BARRA\*\*

L'IMPOSTAZIONE SOGGETTIVISTICA DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ  
DI DE FINETTI

L'IMPOSTAZIONE soggettivistica<sup>1</sup> del calcolo delle probabilità di de Finetti, comprende al suo interno le altre impostazioni e ne amplia le possibilità applicative fornendo *una guida per pensare ed agire nelle condizioni di incertezza che rappresentano la maggior parte dei problemi che affrontiamo*. La sua teoria viene anche riconosciuta come modello dell'apprendimento induttivo e traduce *in forma matematica il punto di vista raggiunto nella filosofia con la penetrante critica di Hume*.

Tutto discende dalla "coerenza" delle decisioni da prendere con la mente ma anche d'istinto...

*un falso pudore vieta di menzionare la parte del processo della scoperta che si svolge più o meno nella sfera dell'inconscio, o del subconscio, per esibire soltanto la dimostrazione fossilizzata nella sua forma scheletrica di logica freddamente deduttiva e formalistica.*

La probabilità ha senso soltanto a partire dalle proprie conoscenze ed esplicitando il proprio grado di fiducia nell'avverarsi di un evento, che può essere considerato in termini economici, e per essere coerenti basta non essere disposti a pagare un prezzo positivo per un guadagno certamente negativo ... Di più, si è coerenti "se e solo se" i nostri gradi di fiducia si combinano secondo le regole del calcolo delle probabilità ...

Si può, e per diverse vie, introdurre come d'uso la misura numerica di una probabilità; allora la condizione necessaria e sufficiente per la coerenza assume una forma ancor più significativa, che ha il solo difetto di essere di natura quantitativa, anziché qualitativa come la precedente. Diciamo scommessa equa, per un dato individuo, che valuti  $p$  la probabilità di un evento  $E$ , quello che dà a uno dei competitori un guadagno  $(1-p)S$  se  $E$  si verifica, e all'altro un guadagno  $pS$  se  $E$  non si verifica (dove  $S$  è una somma qualunque). È naturale dire incoerente un individuo se un insieme di scommesse che egli giudica eque dà un guadagno sicuro a uno dei due competitori, come nel seguente esempio. A una gara partecipano due italiani: i concorrenti  $A$  e  $B$ ; si valutino  $p_A = 0,60$ ,  $p_B = 0,20$ ,  $p = 0,70$  rispettivamente la probabilità di una vittoria di  $A$ , di una vittoria di  $B$ , di una vittoria italiana.

Allora sarebbero eque le tre scommesse che diano:

la 1<sup>a</sup> un guadagno di 40 L. o un perdita di 60 a seconda che  $A$  vinca o non vinca;

la 2<sup>a</sup> un guadagno di 80 L. o una perdita di 20 a seconda che  $B$  vinca o non vinca;

la 3<sup>o</sup> una perdita di 30 L. o un guadagno di 70 a seconda che vinca un italiano o no.

\* La prima parte dell'articolo è pubblicata su INDUZIONI 33, 2006.

\*\* Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze, Sapienza Università di Roma;  
e-mail: barra@mat.uniroma1.it.

<sup>1</sup> Da giovane de Finetti ha usato anche l'espressione "impostazione soggettiva". Successivamente preferiva l'espressione "impostazione soggettivistica" qui indicata, tanto che spesso la precisava in tal senso rivolgendosi a chi non la utilizzava.



*Vinca A, vinca B, vinca un concorrente straniero, in ogni caso si vince una scommessa e se ne perdono due, e il risultato è che si perdono sempre 10 lire (40-20-30 = 80-60-30 = 70-60-20 = -10). Mentre se si rispetta il teorema delle probabilità totali, facendo  $p = p_A + p_B$  (ad es., se si valuta  $p_A = 0,60$  e  $p_B = 0,20$ , valutando coerentemente  $p = 0,80$ ) un simile inconveniente non può mai avere luogo.*

*Ebbene: l'accennata condizione necessaria e sufficiente per la coerenza si riduce a questo. Evitare che mediante un insieme di scommesse giudicate eque si possa ottenere un guadagno sicuro per uno dei competitori. L'esempio precedente mostra anzi come da tale condizione si possa dedurre e dimostrare il teorema delle probabilità totali.<sup>1</sup>*

Con queste premesse de Finetti riesce a dimostrare molte proprietà che altre impostazioni fissano come assiomi, indicando come possano convergere valutazioni differenti sulla base di nuove informazioni, e come misurare le eventuali differenze di opinione dipendenti dalle osservazioni disponibili e dalle valutazioni iniziali, tutte legittime. Infatti, possiamo esprimere anche delle valutazioni molto differenti, e questo ci porterà a fissare due distribuzioni diverse sulle varie ipotesi che possono essere fatte in relazione ad un certo fenomeno, ma tali distribuzioni tenderanno a convergere intorno ai valori della frequenza relativa riscontrata nelle osservazioni effettuate dopo aver espresso le nostre valutazioni, affermando l'ipotesi che meglio la interpretava, prima di queste. Così, il pensiero di de Finetti fornisce anche un argomento forte a favore della tolleranza intellettuale e del rispetto dell'opinione altrui.

Notevole è la quantità di implicazioni che si possono trarre da questa impostazione così poco formale. La sua generalità permette vari campi di applicazione e possibilità dimostrative, altrimenti impossibili se non attraverso *arzigogoli o adhoccaggini* assunti *for mathematical convenience*, che possono portare a paradossi.

Questo richiamo alla semplicità d'impostazione, quest'attenzione alle conseguenze dell'uso del linguaggio e degli strumenti matematici che vengono utilizzati e questo rifiuto di sovrastrutture gratuite, sono le caratteristiche del pensiero di Finetti che rendono il ragionamento scientifico meno automatico e quindi più complesso, ma, oltre che più generale, anche più trasparente e comprensibile ed offrono notevoli possibilità di approfondimento e di sintesi.

Il ruolo dirompente del soggettivismo definettiano ha incontrato per molto tempo l'indifferenza, l'incomprensione o il rifiuto dei seguaci della concezione scientifica ottocentesca, ove il determinismo ne costituiva il presupposto, e l'opposizione di quelli "portati a semplificare" o a difendere i propri privilegi. Oggi tale impostazione è predominante e mostra sempre nuovi sviluppi matematici, ottenendo apprezzamenti da economisti, filosofi, psicologi e pedagogisti che vi riscontrano sia il superamento di altre posizioni difficilmente giustificabili, sia il riconoscimento del sostrato psicologico dei nostri convincimenti e atteggiamenti sia, infine, un modello dell'apprendimento induttivo, che, come abbiamo visto, risulta impossibile qualora si affermi l'indipendenza stocastica degli eventi.

*... riesce particolarmente pregiudizievole la tendenza a sopravvalutare – spesso, addirittura in modo esclusivo – la ragione che, a mio avviso, è invece utilissima solo a patto di venir considerata come un complemento atto a perfezionare tutte le altre facoltà istintive intuitive psicologiche (ma non – guai! – a surrogarle).<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Vedi ad es.: DE FINETTI B. (1930), *Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità*, «Rend. Lincei», (pres. 2 novembre 1930) e *Fondamenti logici del ragionamento probabilistico*, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», n. 5, pp. 1-3.

<sup>2</sup> Dagli *Atti del Corso su Induzione Statistica*, Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) diretto da Bruno de Finetti, Varenna, 1959, p. 3.

LA CONCEZIONE DEFINETTIANA DELLA FILOSOFIA,  
DELLA MATEMATICA E IN PARTICOLARE DELLA GEOMETRIA

La direzione della scienza è determinata dalla nostra immaginazione creativa e non dall'universo dei fatti che ci circonda.

IMRE LAKATOS (1969), *La metodologia dei programmi di ricerca scientifici*.

Non esiste la *vera realtà* e le leggi scientifiche sono strumenti per fare previsioni che dipendono dalle nostre interpretazioni delle osservazioni fatte, sulle quali non possono esserci certezze. Anzi non ha alcun senso parlare di verità o di valori oggettivi e assoluti, ma soltanto di relativismo.

*È questa, suppongo, la grande, somma, saggia, conclusione cui sembra sia giunto Confucio quando affermava che "certezza" è una delle quattro parole che dovrebbero venir cancellate.*

Questo significa che le asserzioni che non possono essere dimostrate non vengono più relegate nell'ambito della retorica o della metafisica, ma divengono oggetto di un nuovo tipo di conoscenza: la *conoscenza probabile*. In tal modo si può *allargare ma in nessun caso restringere, la portata pratica della scienza*. Su questa linea è uscito recentemente anche un testo inedito di de Finetti: *L'invenzione della verità*.

In tutti i lavori di de Finetti emerge la concezione della matematica e della filosofia come strumenti di chiarificazione concettuale di tutte le discipline.

*Per me la matematica è uno strumento che deve adeguarsi strettamente alle esigenze del campo ove la si vuole applicare. Non può imporre per propria comodità assiomi non richiesti da motivi sostanziali o addirittura contrastanti con essi ...*

de Finetti cita Whitehead:<sup>1</sup>

*La matematica nel suo insieme consiste nell'organizzazione di una serie di sussidi per l'immaginazione nel processo del ragionamento.*

In particolare, considera centrale il ruolo svolto dalla geometria:

*La nostra geometria si serve dell'intuizione spaziale, ma più che altro come di un potere magico per dar corpo e rappresentazione a concetti, situazioni, problemi, di carattere generalmente non per se stesso geometrico, ma statistico, economico ecc.; è insomma, per così dire, la dottrina dello schema mentale adatto per afferrare intuitivamente tutti i problemi pratici la cui impostazione scientifica richiede lo strumento matematico.<sup>2</sup>*

*Così la generalità degli intendimenti e la concretezza delle immagini concorrono allo scopo di persuadere che la matematica non è un meccanismo a sé da sostituire al ragionamento, ma è la ragionevole base e prosecuzione dell'ordinario ragionamento.<sup>3</sup>*

La geometria svolge un ruolo essenziale anche oltre le tre dimensioni:

*Non esiste – si può dire – alcun problema che non ammetta, seppure non lo esiga, di essere proiettato in uno spazio a più dimensioni.<sup>4</sup>*

<sup>1</sup> NORTH WHITEHEAD A. (1898), *Universal Algebra*, Cambridge, p. 12. de Finetti riporta la citazione in *Per una storia dei "giochi", Pristem Matematica* (da *Riflessioni su una gara matematica*, «Archimede», 14, 1962, 273-290.); che si può trovare nel sito di de Finetti.

<sup>2</sup> DE FINETTI B. (1959), *Matematica logico intuitiva*, Cremonese, p. 256.

<sup>3</sup> Ivi, p. XII.

<sup>4</sup> DE FINETTI B. (1970), *Teoria delle probabilità*, Einaudi, p. 535.

*La mancanza della diretta intuizione visiva nell'andare oltre le tre dimensioni non è da tale punto di vista un ostacolo meno esteriore e contingente di quanto la mancanza di dita nell'estendere la definizione di numero oltre il dieci.*<sup>1</sup>

La filosofia deve svolgere un ruolo analogo a quello svolto dalla matematica fino a fondersi con questa:

*è "cattiva" filosofia quella che sommerge fatti e idee in nuvole di parole e superfetazioni irrilevanti; è "buona filosofia" quella che cerca di eliminare tutto ciò che di troppo e di illusorio viene già aggiunto dal linguaggio comune per ridursi al minimo veramente essenziale ... una discussione di carattere filosofico è quella che riprende una questione tecnica per riflettere sui suoi concetti e presupposti al di là del punto di vista tecnico, e l'esigenza cui deve rispondere è di semplificare, di chiarire, non di gravare il discorso di significati astrusi... le considerazioni "filosofiche" sono intese non ad aggiungere sovrastutture e fronzoli bensì (come ritengo utile) a scarnificare di quanto rimane di troppo anche nelle concezioni scientifiche.*<sup>2</sup>

Nell'impostazione definettiana viene precisato anche il modo di intendere la logica classica, cui dà il nome di *logica del certo* per distinguerla dalla *logica del probabile*, di cui viene considerata un caso particolare.

*La logica è la scienza che dalla verità o falsità di certe premesse insegna a dedurre e concludere la verità o falsità di certe conseguenze; a seconda del senso che daremo al concetto di verità, avremo dunque due modi diversi di concepire la logica. Se la verità si concepisce in senso obiettivo, la logica appare come una proprietà di cui deve godere il mondo reale, come una specie di legge esteriore che regola la verità o falsità, in senso obiettivo, di certe proposizioni. Se ci si limita invece all'aspetto soggettivo, la logica non riguarda che i processi mentali, e non insegna se non la coerenza del pensiero con se stesso. Questa seconda accezione è più generale e più larga dell'altra, perché indipendente da ogni particolare precisazione del valore da dare al concetto di "vero" o "falso".*

*... Mentre le concezioni oggettive tendono a fare del calcolo delle probabilità uno strumento accessorio per la trattazione di determinati tipi di problemi particolari, la concezione soggettiva lo fa assurgere al ruolo di primordiale strumento logico del pensiero, di cui la logica ordinaria, la logica del certo, appare un caso limite teorico con un campo di applicazione estremamente ristretto.*<sup>3</sup>

#### L'IMPEGNO SOCIALE DI BRUNO DE FINETTI<sup>4</sup> UN "NOBEL MANCATO", UN "EROE DEI DUE MONDI"

Bruno de Finetti si interessa anche di economia, biologia, ingegneria, fisica, scienze attuariali, teoria delle decisioni e ricerca operativa, teoria dei giochi, psicologia, pedagogia, epistemologia, filosofia, didattica e politica e si occupa anche di aspetti molto particolari che testimoniano l'impegno sociale di una persona che sa che è importante costruirsi una visione generale dei problemi, ma che è anche necessario "rimboccarsi le maniche".

Così, Bruno de Finetti si occupa dei prezzi dei biglietti ferro-tranviari (*né si ritenga*

<sup>1</sup> DE FINETTI B. (1959), *Matematica logica intuitiva*, cit., Cremonese, p. 261.

<sup>2</sup> Dagli interventi di Bruno de Finetti in: *I fondamenti del Calcolo delle Probabilità*, Atti della tavola rotonda tenuta a Poppi, 11-12 giugno 1966, a cura di Dario Furst e Giuseppe Parenti, Firenze, Scuola di Statistica dell'Università, 1967, p. 146 e pp. 203-204.

<sup>3</sup> DE FINETTI B. (1981), *Scritti 1926-30*, cit., p. 261.

<sup>4</sup> Oltre alla bibliografia presente nel sito <http://www.brunodefinetti.it/>, farò riferimento al libro, che non mi sembra ivi incluso: *Dall'utopia all'alternativa*, a cura di Bruno de Finetti, Franco Angeli-La società, 1976.

fuori luogo menzionare un fatterello minimo, perché come esempio di imbecillità stroncata può essere miracoloso quanto gli altri), di massimo comun divisore, schede meccaniche informatiche, macchine elettroniche, anagrafe, spese di riscossione e centralizzazione, “numeri normali” e stipendi, tariffe ferroviarie, inconscio, credibilità, elezioni, insegnamento e programmi contro la “matematica per deficienti”, gare matematiche, parole e simboli appropriati alle esigenze, regioni, assicurazioni e banche, pregiudizio e libertà, numeri telefonici, abolizione del denaro, logica in campo sanitario, visione unitaria della scienza, pensiero euristico, efficienza, storture della pubblica amministrazione, codice fiscale e anagrafe tributaria, costi previdenziali e di produzione, forme estetiche e leggi fisiche, prevenzione dalle alluvioni, funzione della fantasia, ...

A prima vista questi temi sembrano eccessivamente numerosi ed eterogenei da permetterne una trattazione approfondita.

È vero il contrario.

In particolare, la sua lunga pubblicazione *Il problema dei pieni*,<sup>1</sup> del 1938, è la prima importante espressione dei contributi di Bruno de Finetti alla attuale teoria del portafoglio. Tale lavoro, la cui importanza è oggi riconosciuta a livello internazionale e in particolare dal prof. M. Rubinstein, può essere considerato come la fondazione della moderna teoria della finanza.

In tale pubblicazione infatti sono contenuti metodi e risultati fondamentali che, circa dodici anni dopo, saranno ottenuti indipendentemente da H. Markowitz in alcuni suoi lavori, che, nel 1990, gli frutteranno il premio Nobel per l'economia e l'appellativo di “padre fondatore della moderna finanza”. Titolo che poteva essere assegnato a de Finetti, assieme al premio Nobel, se il suo lavoro dei pieni avesse avuto quell'attenzione e quella diffusione che meritava. Dunque è possibile parlare di Bruno de Finetti anche come di un *Nobel mancato*, come ha scritto Luca Nicotra,<sup>2</sup> o di *Un eroe dei due mondi* come lo ha definito Flavio Pressacco nell'ultimo Convegno Internazionale<sup>3</sup> in onore di de Finetti, facendo riferimento ai suoi risultati in matematica e in economia.

Le sue posizioni s'intrecciano con quelle di Federico Caffè, Siro Lombardini, Luigi Spaventa e tanti altri economisti e personaggi famosi della cultura internazionale, con i quali s'incontra periodicamente in convegni residenziali. Si tratta di sollecitazioni accompagnate da schemi e modelli matematici costruiti personalmente con estrema facilità, o elaborati da centri prestigiosi di ricerca, come il Massachusetts Institute of Technology.

*Devo comunque spiegare come e perché mi sono sempre sentito più vicino al socialismo degli utopisti, o dei progettisti di riforme del sistema economico, che alle elucubrazioni filosofeggianti di Marx e seguaci, che mi apparivano simili, come linguaggio e oscurità, ad autori lontani e ripugnanti al mio spirito e alla mia mentalità, e cioè ad autori come Croce, Heghel, Kant, e simili. Il che è logico dato che mi trovo bene solo nel filone dei pensatori chiari, lucidi, pratici, che discende da Locke, Berkeley e (soprattutto) Hume, e si perfeziona nel pragmatismo di Giovanni Vailati (cfr. l'imponente raccolta dei suoi scritti, Seeber, Firenze 1911) e, salvo ingenuità ed esagerazioni, nel positivismo di Federico Enriques.*<sup>4</sup>

Le sue espressioni sono spesso pungenti.

<sup>1</sup> DE FINETTI B. (1940), *Il problema dei “pieni”*, «Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari», 11, pp. 1-88.

<sup>2</sup> Bruno Nicotra e l'unica figlia, Fulvia, di Bruno de Finetti, curano, con aggiornamenti continui, il sito <http://www.brunodefinetti.it/>, molto interessante.

<sup>3</sup> *International Symposium, Bruno de Finetti Centenary Conference*, Roma, 15-17 novembre 2006. Flavio Pressacco (Università di Udine) ha chiuso il convegno con questo intervento: *B. de Finetti hero of the two worlds: (applied) mathematician and (quantitative) economist*.

<sup>4</sup> *Dall'utopia all'alternativa*, cit., p. 37.

*Ben vengano dunque i “rompiscatole” – quelli come me – che sgonfiano i palloncini che fanno stare in piedi ciò che non sta in piedi<sup>1</sup>... Deploro profondamente la stoltezza e l'autolesionismo delle correnti di pensiero che si mummificano riducendosi a chiese dogmatiche e intolleranti...*

*Onore a chi non si piega, a chi resiste all'involuzione faziosa e mortifera. Onore a “Gli accusati” come sono chiamati, nel titolo del libro del collega e amico Lucio Lombardo Radice, gli scrittori sovietici perseguitati o emarginati per insufficiente acquiescenza alle autorità imperversanti nel loro paese. Onore a Lombardo Radice che, pur essendo membro del Comitato centrale del PCI, si mise in tal modo apertamente dalla loro parte. Ed, in certa misura, onore anche al Pci, che non si comportò come il confratello francese ... né per tale libro, né per il rifiuto di Lombardo Radice di votare per la scomunica ai compagni de “il Manifesto”...*

*Onore ai cristiani che, ... si salvarono l'anima prendendo le distanze dalla “bestia trionfante” e ritrovando la via della salvezza nella redenzione anche civile dell'uomo attraverso l'instaurazione della giustizia sociale: Comunità, movimenti, individui, più o meno riconoscibili come “Cristiani per il Socialismo”...<sup>2</sup>*

*Nel caso specifico dei problemi economico-sociali, ritengo poi del tutto controproducente ogni negazione o sottovalutazione del momento “volontaristico”. Certo, certe conquiste sono condizionate da uno stato di fatto che le rende “possibili” ..., ma non avverrebbero se l'aspirazione alla giustizia, il sogno di “città del sole”, gli ingenui progetti dei primi utopisti, non avessero preparato il terreno da secoli, e se la volontà (e spesso le lotte) ispirate da queste visioni ... non riuscissero a fiaccare le resistenze reazionarie ... e se è vero che i sovietici hanno condannato Mao come un “volontarista”, come un antimarxista che crede che la volontà dell'uomo possa, quasi per magia, a forza di desiderio, esorcizzare i fatti oggettivi”... Se la differenza fra marxisti e maoisti consistesse in questo... dovrei senza esitazione alcuna dichiararmi maoista.<sup>3</sup>*

Politicamente de Finetti è “stato tirato per la giacca” da molti partiti, per le parole da lui scritte su Mussolini, Fanfani, Giovanni XXIII, Labor, Pannella, Kennedy e Krusciov ... su Marcuse, Marx, Mao, ... e credo sia l'unico matematico che compaia nel calendario dei carabinieri (novembre 2001).

In effetti, all'età di 24 anni, Bruno de Finetti conclude un suo lavoro<sup>4</sup> con queste parole:

*Ma dove con maggior furore il mio spirito si ribellava e si scagliava contro il concetto di “verità assoluta” era nel campo della politica, e non saprei dire qual parte, di certo assai grande, nello sviluppo delle mie idee, dovette avere questo senso di insofferente rivolta. Vedersi davanti degli idoli di cartapesta, e una classe politica miserabile che avrebbe preferito in rovina l'Italia piuttosto che mancare ad essi (sacrilegio!) del dovuto ossequio! Quelle deliziose verità assolute che imbottivano i cervelli demo-liberali! Quell'impeccabile meccanica razionale del perfetto reggimento civile dei popoli, conforme ai diritti dell'uomo e altri vari nonché immortali principi!*

*Ottobre del ventidue! Mi sembrava di vederli, questi immortali Principi cadaveri immondi nella polvere. E con quale voluttà consapevole e feroce sentivo di calpestarli, marciando ai canti del trionfo, oscura ma fedele camicia nera!*

Qualcuno, a questo proposito, ha detto:

*negli anni '30, chi non era fascista!*

<sup>1</sup> Ivi, p. 35.

<sup>2</sup> Ivi, pp. 23-24.

<sup>3</sup> Ivi, p. 38.

<sup>4</sup> DE FINETTI B. (1931), *Probabilismo. Saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza*, «LOGOS», Biblioteca di Filosofia, diretta da A. Aliotta, Perella, Napoli, pp.163-219. E in DE FINETTI B. (1989), *La logica dell'incerto*, a cura di Marco Mondadori, Milano, Il Saggiatore.

Si può rispondere, ad esempio, che nel giugno del '24 era stato già assassinato il deputato socialista Giacomo Matteotti.

Ma Mussolini si era assunto “soltanto” la responsabilità politica della morte, presentata come una “dolorosa disgrazia” e non come un delitto premeditato. Dissero che tutto era avvenuto all’insaputa di Mussolini.

Dovevano risultare convincenti se, ad esempio il grande Luigi Pirandello, di cui tutti ammiriamo la penetrante capacità di indagine psicologica e che sicuramente era molto amato da de Finetti, inviò due mesi dopo l’omicidio, un telegramma a Mussolini per aderire al fascismo.

Così l’obiezione: *allora chi non era fascista!* risulta abbastanza convincente, soprattutto considerando la giovane età di de Finetti e il suo desiderio di costruire un mondo migliore.

Comunque de Finetti muterà i propri convincimenti.

Ad esempio si presenterà candidato a Roma per il Movimento Politico dei Lavoratori (Mpl) di Labor nelle elezioni del '72.

A questo proposito dirà subito dopo:

*... presero di contropiede le forze nuove in fase di evoluzione e di assestamento.*

*A causa di ciò si toccò il fondo, si superò il limite non solo dell’indecenza sopportabile, con l’incredibile governo di centro destra Andreotti-Malagodi (in nota scrive: basti rammentare l’elargizione di superstipendi e superpensioni ai superburocrati, altrettanto dannosa e ingiusta sia quando premiava gli inetti che quando incoraggiava i pochi elementi validi e benemeriti e difficilmente sostituibili a cessare dal servire lo stato).<sup>1</sup>*

Io stesso in un Consiglio dell’allora Istituto di Matematica de “La Sapienza” l’ho visto, con stupore dato il suo aspetto mite, battere un pugno sul tavolo e gridare: *viva Pannella!*, in risposta ad una battuta che prendeva in giro il politico.

Rimarrà costante il suo impegno sociale.

In ogni tempo penserà di migliorare la società combattendo coloro che ne intralciano il miglioramento per difendere i propri privilegi, ed appoggiando coloro che sono spinti a realizzarlo da ideali morali di giustizia sociale.

Il suo obiettivo rimarrà il miglioramento radicale della qualità della vita.

Per questo obiettivo rivolgerà la propria attenzione anche ad aspetti particolari come la necessità di controllare le proprie abitudini, distinguere i bisogni reali da quelli futuri, ..., e aggiungere ai costi attuali i costi futuri da pagare per l’inquinamento e la scarsità di risorse.

Così, negli ultimi suoi scritti:

*Ma sono ben più penetranti e convincenti le spiegazioni date a questo proposito da Marcuse: “uno degli aspetti più inquietanti della civiltà industriale avanzata è il carattere razionale della sua irrazionalità, la sua produttività ed efficienza, la sua capacità di accrescere e diffondere le comodità, di trasformare lo spreco in bisogno e la distruzione in costruzione ... il processo economico è diventato irrazionale alle radici ..., ma la conclusione è sempre la stessa: l’autodistruzione dell’umanità entro il prossimo secolo ... il fattore determinante della catastrofe può essere l’inquinamento o l’esaurirsi delle risorse o la scarsità di cibo... molto dipende... dall’illusione di una eterna crescita senza limiti ... Occorrerebbe il massimo impegno per economizzare le risorse (curando una maggiore durata per gli oggetti prodotti, recuperando le materie prime, ... combattere gli inquinamenti, controllare le nascite ... Occorre frenare lo sviluppo con contromisure che*

<sup>1</sup> Dall’*utopia all’alternativa*, cit., p. 24.

non saranno piacevoli ... quanto agli incentivi ... cosa potrebbe esserci di meglio che il sapere che una nuova idea sarà trasformata in un visibile miglioramento della qualità della vita?...

[Dopo aver disapprovato alcune posizioni di Marx] Più convincenti mi sembrano le critiche di Marx alle “contraddizioni” del sistema capitalista, per le quali ne prevedeva l'imminente crollo ... critiche negate perché il crollo non è avvenuto... a mio avviso, non la previsione di Marx era infondata, ma ne è stato evitato l'avverarsi grazie alla pressione sindacale che ha in parte e gradualmente corretto gli squilibri di ripartizione dei redditi rendendoli meno intollerabili ed esplosivi...

L'evoluzione dei partiti comunisti europei, e in prima linea del Pci, secondo la prospettiva dell'“eurocomunismo”, coraggiosamente proclamata anche a cospetto di Breznev, sembra affermarsi sempre più solidamente. E, parallelamente, nei partiti che si dicono “cattolici”, prendono il sopravvento le istanze sociali rispondenti a una visione autenticamente cristiana, contro le remore reazionarie clericosanfediste. La sconfitta della cricca dirigente mafioso-camorrista-bustarellista-vaticanagliesca, e l'avvento di un vero Cristiano come Benigno Zaccagnini, costituisce per il popolo italiano una tappa fondamentale verso il cammino della liberazione.<sup>1</sup>

de Finetti crede che l'Utopia debba guidare le nostre azioni.

L'Utopia consiste, in fondo, in una cosa che dovrebbe apparire ovvia a chiunque se non esistessero preconcetti di cui molti sono vittime. Consiste infatti, semplicemente, nel dire che si deve pensare dapprima ai “fini”, e solo “dopo” ai “mezzi” per raggiungerli ...<sup>2</sup>

de Finetti si rivolge in particolare contro la burocrazia, che è rigida con i nemici, e accomodante con gli amici, che mostra una generale arretratezza intellettuale e morale, che va dalle forme di ragionamento vuotamente metafisico o cavillosamente giuridico alle storture dei giudizi che si attengono alle formalità insignificanti, disdegnano la sostanza delle questioni e premiano quegli esseri spregevoli che si abbassano a fare i prepotenti ed i “furbi”, e contro la pubblica amministrazione che ha mille occhi come Argo, ma manca delle strutture cerebrali occorrenti per renderli utilizzabili. La tragicomica vicissitudine degli impianti acquistati – ma non utilizzati finché non divennero inutilizzabili – per l'Anagrafe Tributaria è emblematica.<sup>3</sup>

#### IL MANIFESTO DI BATTAGLIA CONTRO IL CULTO DELL'IMBECILLITÀ

L'invettiva, quasi disperata, con l'obbiettivo di una disinfezione antiimbecillista, esplose nel suo *Manifesto di battaglia contro il culto dell'imbecillità* ove auspica un rinnovamento profondo delle strutture della società in termini del binomio politica – scienza: L'imbecillità è un difetto, e come tale va rispettato ... Ma il “culto dell'imbecillità”, no, non è semplicemente un difetto ... è una malattia perniciosa, ... Lo Stato è soffocato, nel necessario sviluppo dei suoi compiti e della sua efficienza, da un'inestricabile farragine di residuati anacronistici che ne appesantiscono e inceppano l'attività condannandolo a progressiva paralisi: leggi e norme ispirate a concezioni antidiluviane, strutture istituzionali e procedure burocratiche cui è rigorosamente estraneo ogni criterio di funzionalità, mancanza di uffici che occorrerebbero e proliferazione di uffici ed enti inutili e dannosi, scarsità di dipendenti negli uffici dove ci sarebbe da svolgere un lavoro proficuo e plethora dove è vero l'opposto ...

Urge impegnarci. Urge riuscire. Altrimenti saremo ben presto sopravanzati e distanziati anche dai paesi “in via di sviluppo” [de Finetti lo scrive nel 1965]. Nel cammino verso la civiltà moderna essi incontrano infatti difficoltà immani, ma possono tuttavia percorrere una scorciatoia senza intoppi...<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Ivi, p. 51.

<sup>2</sup> Ivi, p. 11.

<sup>3</sup> Ivi, p. 47.

<sup>4</sup> DE FINETTI B. (1965), *Manifesto di battaglia contro il culto dell'imbecillità*, «Homo Faber», anno XVI, n. 160. È stato ristampato e commentato in DE FINETTI B. (1969), *Un matematico e l'economia*, Franco Angeli Editore, capitolo diciassettesimo, *Disinfezione antiimbecillista*, pp. 294-302. Altri lavori di de Finetti pubbli-

## BRUNO DE FINETTI E LA DIDATTICA

Nel suo impegno per il miglioramento della società, Bruno de Finetti dedica molto tempo alla scuola. È presidente della Mathesis e direttore della rivista *Periodico di matematiche*. In questa e in molte altre riviste, pubblica numerosissimi articoli di didattica e in particolare sull'insegnamento della matematica.

Poiché questo argomento è sicuramente più complesso della matematica, mi limiterò a riportare alcune citazioni invitando i lettori alla lettura degli articoli da cui sono tratte.

Sinteticamente, de Finetti considera fondamentale "apprendere per problemi", privilegiando il collegamento con la storia e favorendo il ragionamento induttivo, cercando infine di fondere insieme gli argomenti e i metodi risolutivi e lasciando molto spazio alla scoperta.<sup>1</sup>

Cita Galilei:

*Io stimo più il trovar un vero, benché di cosa leggiera, che l' disputar lungamente delle massime questioni senza conseguir verità nessuna,*<sup>2</sup>

e cita un'insegnante che stima particolarmente, Emma Castelnuovo:

*in quelle pagine sono stati toccati i più gravi problemi che la realtà abbia mai proposto all'uomo; sono questi i veri problemi che l'umanità ha faticosamente affrontato nel corso dei secoli per poter risolvere quelle questioni che la tecnica, il commercio, l'industria, la natura stessa imponeva giornalmente, sono problemi che ne aprono sempre di nuovi, di veri, di reali. Vedrete che voi stessi sarete condotti a porvi delle questioni, a pensare degli altri problemi; e il pensare un problema, il porsi delle questioni e dei perché è ancor più difficile che il saperli risolvere, ed è più bello...*

*La forma di ragionamento valida nell'ambito della logica del certo, ossia della logica propriamente detta, è quella del ragionamento deduttivo. Non si può giungere, col ragionamento, a conclusioni certe se non provando che sono incluse in cose già note, ossia facendo discendere il particolare dal generale. Ma è anche evidente che, in questo modo, non si può mai giungere ad allargare il campo delle nostre conoscenze (salvo nel senso di rendere esplicita qualche conoscenza implicitamente acquisita ma rimastaci inavvertita).*

*Quello che porta a concludere, partendo da ciò che si sa o che si è accertato, qualcosa che vada oltre, è soltanto il ragionamento induttivo.*<sup>3</sup>

*Considero 'formativo' un insegnamento che sviluppa la capacità di affrontare autonomamente e direttamente i problemi, di "vederli" di impostarli e pensarvi e ragionarvi sopra, usando anche (ma con discernimento e scioltezza) eventuali strumenti appresi, ma sempre scegliendo la via più semplice, naturale, intuitiva, suggestiva. E così dicendo intendo riferirmi a tutti i problemi di qualsiasi natura che uno può incontrare nel corso della vita, ed al frutto dell'istruzione e educazione nel suo complesso, senza distinzione di materie.*

La matematica, come ogni altro insegnamento, deve contribuire per la sua parte

citati dalla Franco Angeli sono: Pareto in *I maestri dell'economia moderna*, 1970. *L'utopia come presupposto necessario per ogni impostazione significativa della scienza economica*, in *Requisiti per un sistema economico accettabile in relazione alle esigenze della collettività*, 1973. *Discorso introduttivo*, in *Crisi dell'energia e crisi di miopia*, 1974.

<sup>1</sup> Rimando a quelli che molti, fra gli studiosi di didattica, ritengono due dei libri più belli e originali di matematica: DE FINETTI B. (2006), *Matematica logico intuitiva* (Milano, ristampato da Giuffrè, pp. 772) e DE FINETTI B. (1967), *Il saper vedere in matematica*, Loescher, tradotto in varie lingue.

<sup>2</sup> GALILEO GALILEI, *Postilla marginale alle Considerazioni appartenenti al libro del sig. Vincenzo di Grazia*. È citato in *Cosa è un insegnamento "formativo"*, «Istituto Tecnico, Rassegna trimestrale di cultura», IV, 2-3-4, Aprile-Dicembre 1966, pp. 25-30.

<sup>3</sup> DE FINETTI B. (1970), *Teoria delle Probabilità*, Torino, Einaudi, p. 563.



alla comprensione del tutto, facendo vedere o intravedere gli aspetti “matematici” in senso lato presenti più o meno in ogni problema, anche non “matematico” nello squallido senso scolastico. Ma non diversamente e non meno dovrebbe ad esempio servire l’italiano per trovare la forma più semplice, chiara, precisa, possibilmente anche elegante e suggestiva, per descrivere spiegare dimostrare cose più o meno strettamente pertinenti alla matematica. E tutte le altre discipline (dalla fisica all’economia, dalla topografia alla statistica) dovrebbero sempre affacciarsi per arricchire di significati illuminanti e fecondi ogni formula incontrata in una sola interpretazione applicativa se non addirittura nel vuoto delle astrazioni. Vuoto apparente: ma per difendere l’“astrazione” dall’accusa di vuotaggine non serve fare vuoti seppur sapienti discorsi che la lasciano vuota, bensì occorre mostrare con svariati interessanti ed utili esempi d’interpretazioni e applicazioni effettive come un discorso “in astratto” non sia (né debba essere!) un discorso su “niente di concreto”, ma al contrario un discorso su “tutte le cose concrete” soddisfacenti le premesse di partenza.<sup>1</sup>

Sul ruolo della motivazione e della storia de Finetti afferma:

*nessun argomento ha valore o interesse di per sé, ma ogni argomento lo acquista se introdotto al momento giusto in connessione con altre problematiche interessanti... appare essenziale... la raccomandazione all’interdisciplinarietà: sono le connessioni effettive (applicazioni, analogie, interazioni, simbiosi di concetti) che danno ai giovani l’impressione di fare scoperte e la soddisfazione di sentirsi creativi.*

*... ampliare e approfondire la conoscenza, anche solo informativa... degli aspetti concettualmente più significativi della matematica, nella sua storia, nel suo nesso con questioni filosofiche, nel progressivo estendersi dei suoi campi di ricerca e di applicazione scientifica e tecnica... sarebbe un gran risultato arrivare a... una comprensione, sia pur sommaria, dell’opera di tali autori (al-Khuwarizmi, Poncelet, Riemann...) e del significato che ebbe nel suo momento storico e per gli sviluppi futuri... Quanto al nesso con le applicazioni e con gli sviluppi moderni, non sarebbe interessante per tutti sapere, non dico cosa sia il calcolo differenziale..., ma quale sia il tipo di problemi di cui si occupa e in cui trova concreta applicazione?<sup>2</sup>*

L’obiettivo generale della didattica è “Il fusionismo”:

*Per “fusionismo” si intende principalmente (come risulta anche dalla frase riportata di Klein) la completa fusione degli argomenti geometrici e di quelli analitici (aritmetici, algebrici, ecc.), tradizionalmente tenuti separati, spesso addirittura con bigottismo puristico quasi per timore che al contatto si contaminassero a vicenda.<sup>3</sup>*

*Il ‘fusionismo’ – il concetto informatore dell’illuminata visione didattica di Felix Klein – è il superamento dell’antiquato modo di procedere passo passo, muniti di apparecchi puristici intesi a limitarne la comprensione (se così si può dirla) a compartimenti stagni, isolati, formalizzati. Il fusionismo comincia col fondere aritmetica (e sviluppi come l’analisi) con geometria e poi con nozioni quali il tempo, la massa, i prezzi, e così via quanto serve nelle applicazioni che a loro volta servono ad arricchire la visione dei concetti astratti iniziali e farne apprezzare la validità.<sup>4</sup>*

*Ho sempre indicato nel fusionismo il principale concetto di base per il miglioramento dell’in-*

<sup>1</sup> DE FINETTI B. (1966), *L’insegnamento della scienza come ricerca*, in *Spunti per una pedagogia della scienza; sezione Matematica*. Numero speciale di «Istituto Tecnico. Rassegna trimestrale di cultura», IV, 2-3-4, pp. 25-30, Aprile-Dicembre.

<sup>2</sup> DE FINETTI B. (1975), *Parole di apertura al congresso in Sila*, «Periodico di Matematiche», vol. 51.

<sup>3</sup> DE FINETTI B., 1978, *La matematica non deve essere uno spauracchio*, «Orientamenti scientifici», 4, pp. 7-19.

<sup>4</sup> DE FINETTI B., 1976, *Dalla realtà, nella realtà, per la realtà*, «Periodico di Matematiche», vol. 52, pp. 43-47.

segnamento e della comprensione della matematica. Nel senso più specifico, in cui fu introdotto da Felix Klein, il *fusionismo* consiste nella fusione dello studio di geometria da una parte e di aritmetica, analisi ecc. dall'altra; più in generale si tratta di fondere in modo unitario tutto ciò che si studia (anche interdisciplinariamente, tra matematica...), mentre le tendenze antiquate predicavano il "purismo" di ogni ramo da coltivare isolato senza contaminazioni.<sup>1</sup>

Ciò che risulta fondamentale è *far capire*, ribaltando i metodi della *passaggistica* o della *teoremologia*, e considerando che l'obiettivo della comprensione deve essere prioritario anche rispetto all'apprendimento di alcune tecniche e al perseguimento del rigore formale:

*Chi segue una catena di sillogismi o passaggi può venir condotto (come usava dire Federico Enriques) ad ammettere obbligo con una verità senza vederne il perché. Ma proprio vederne il perché è invece, a mio avviso l'essenziale ...*<sup>2</sup>

Anche la preoccupazione del rigore cambia aspetto: occorre far penetrare il perché dei risultati, non farne verificare l'esattezza, il che è altra cosa, né necessaria (dove non si tratta che di passaggi materiali non vedo perché ogni principiante dovrebbe accertarsi da sé che non vi sia una svista sfuggita a tutti prima di lui), né sufficiente (perché dopo aver imparato con quali manipolazioni si ricava una formula da un'altra non è detto che si sia penetrato il contenuto di ragionamento dei passaggi eseguiti). Per lo stesso motivo l'importanza delle formule e dei calcoli risulta in tale trattazione diminuita in confronto a quella data ai concetti e alle immagini, perché l'importanza dell'imparare vi è sempre, come dev'essere, subordinata a quella di capire.<sup>3</sup>

L'utilizzazione in senso inverso delle regole di derivazione ... è più efficace ma è più aleatoria, ed occorre una grande pratica, acquistabile solo con molti esercizi, per imparare a farne uso proficuamente in casi via via meno semplici. Esistono però dei prontuari ove si trovano pronti gli integrali dei tipi di funzioni che più frequentemente possono presentarsi, ed ad essi conviene ricorrere quanti, come la più parte delle persone cui è destinato il libro, non hanno motivo di ingolfarsi nella tecnica del calcolo integrale, sulla quale ci limitiamo a dare, nel prossimo n. 138, il minimo delle nozioni occorrenti anche dal punto di vista concettuale per averne una idea adeguata.<sup>4</sup>

Un altro preconcetto e movente del ragionare in astratto è per molti la preoccupazione di 'bandire l'intuizione, perché talvolta induce in errore'. La preoccupazione può essere giustificata in delicate questioni di critica dei principi; fuori di tali situazioni eccezionali è ben maggiore il rischio di errare per mancanza del controllo dell'intuizione che non per le sue imperfezioni se è presente. Volerla bandire sarebbe come cavarsi gli occhi perché esistono le 'illusioni ottiche' senza sospettare che la cecità abbia pure qualche inconveniente.<sup>5</sup>

... speriamo che... un rinnovamento possa attuarsi. Si vedrà allora che la matematica, come qualunque cosa, è difficile a volerla approfondire, ma non è affatto una cosa incomprensibile o indigesta per nessuna persona di media intelligenza che desideri conoscerne quel tanto che è istruttivo saperne per i non specialisti.

Ma è bene tuttavia che tutti coloro che "sentono" il problema perseverino nello sforzo nel modo più istruttivo e combattivo, ... perché ogni realizzazione incontra ostacoli esterni (specie se i conservatori vi ravvisano inquietanti tracce d'intelligenza).<sup>6</sup>

Il centenario della nascita di Bruno de Finetti offre una occasione irripetibile per pre-

<sup>1</sup> DE FINETTI B., 1974, *Contro la "Matematica per deficienti"*, «Periodico di Matematiche», vol. 50, n. 1-2.

<sup>2</sup> DE FINETTI B., 1970, *Teoria delle Probabilità*, Einaudi, p. 584.

<sup>3</sup> DE FINETTI B., 1959, *Matematica logico intuitiva*, Cremonese, p. XIII.

<sup>4</sup> Ivi, p. 566.

<sup>5</sup> DE FINETTI B., 1965, *Programmi e criteri per l'insegnamento della matematica alla luce delle diverse esigenze*, «Periodico di Matematiche», 43, 2, pp. 119-143.

<sup>6</sup> *Programmi e criteri per l'insegnamento ...*, cit., p. 8.

sentare il suo pensiero in modo organico, riproponendo integralmente il testo del suo intervento al Convegno della C.I.I.M. (oggi CIIM) del 1974.

Non è facile trovare un altro protagonista così importante della matematica e della cultura che abbia provato interesse così intensamente ed operativamente per la didattica, sia in generale, sia su aspetti molto particolari, sia, soprattutto, fornendo moltissimi esempi.

CONVEGNO DELLA C.I.I.M. VIAREGGIO (24-25-26 OTTOBRE 1974)

*Interventi di Bruno de Finetti (Roma)*

*I miei interventi furono parecchi, inseriti come frammenti nelle discussioni sulle diverse relazioni, ma, a posteriori, risultano piuttosto frammenti di un unico discorso, ripreso per ampliarlo e chiarirlo a seguito di stimoli vari: idee concordanti o discordanti di altri intervenuti, inesatte interpretazioni di tesi precedentemente sostenute, richieste di esemplificazioni, ecc.. Mi sembrò pertanto necessario, o quanto meno opportuno, proporre di fondere in un unico testo i diversi interventi, ricostruiti e ricuciti un po' liberamente (e il Presidente fu d'accordo).*

### 1. Concreto e astratto: contrapposizione o fusione?

*Nel convegno è riecheggiata più volte l'antica (e vorrei dire antiquata) contrapposizione tra valore "culturale" di una matematica "pura" nel senso di "astratta", e valore puramente "strumentale", "utilitario", di una matematica "applicata" a problemi concernenti cose e nozioni concrete, pratiche, ... o perfino "utili"! E tale contrapposizione si manifesta fin dai primi passi di ogni insegnamento, nel diverso modo di concepire la funzione e la collocazione di esempi concreti nell'introduzione e nella spiegazione di una qualunque teoria matematica.*

*Grosso modo, il dilemma consiste nella scelta tra:*

*a) introdurre come "regole" arbitrarie, chiamate "assiomi", delle convenzioni per operare su simboli immuni da ogni significato, e poi fare esempi e applicazioni come se i fatti obbedissero per obbligo o per casuale coincidenza agli assiomi sbocciati dal vuoto; oppure*

*b) mostrare, su numerosi e svariati esempi pratici (i più semplici e significativi tra quelli adeguati all'età e preparazione dei discenti), come si presentino spontaneamente svariate nozioni concrete, godenti di proprietà analoghe, traducibili, con qualche po' di idealizzazione, in nozioni astratte; così l'astrazione appare non il rifiuto del concreto, bensì la quintessenza e il perfezionamento del concreto, ossia ciò che ne coglie e valorizza gli aspetti più essenziali.*

*Adottando, come mi appare ragionevole, questo secondo punto di vista, le esemplificazioni pratiche più semplici (ridotte magari a cenni) devono precedere ogni teorizzazione per creare anzitutto una motivazione, atta a predisporre all'accettazione di astrazioni che appaiono giustificate, ed evitare così la reazione di rigetto che la via opposta spesso produce, non del tutto ingiustificatamente. E ritengo sia questa la causa che impedisce ai più, per tutta la vita, di "capire" e apprezzare la matematica.*

*Oltre che al fine, già detto, di motivazione, le esemplificazioni preliminari e le considerazioni che legano varie interpretazioni pratiche a identici o simili sistemi di assiomi, abituando a scoprire le analogie di natura pratica tra essi, mostrano come il significato degli assiomi non è "astratto" se non nel senso di "multiconcreto": esprime e idealizza proprietà riscontrabili in svariati casi e che è ragionevole prevedere troveranno analoga applicazione in molte altre applicazioni più o meno analoghe.*

*Ciò aiuta, o dovrebbe aiutare (ma non ci si cura abbastanza di questa esigenza pur essenziale!) a formarsi modelli mentali – per es. di natura geometrica, o meccanica, ecc. (e sarebbe bene insegnare a distinguere, più o meno consciamente e chiaramente, ad es. tra modelli geometrici puramente topologici, o affini, o metrici, ecc.) – modelli fra i quali potremo spesso, a un grado*

*più avanzato di approfondimento del problema, riconoscerne uno che risponde pienamente allo scopo di tradurre proprietà in esso interpretabili le proprietà reali dell'oggetto allo studio.*

*Gli esempi che devono venire dopo (dopo costruita la struttura matematica – astratta, assiomaticizzata – della teoria o del modello) potranno avere, in genere, prevalentemente, lo scopo opposto: quello di dare un'idea del tipo di questioni pratiche di un dato campo di studi (dalla geometria pratica alla fisica, dalla tecnica all'economia, dalla biologia all'astronomia, ecc.) che la struttura matematica consente di affrontare e risolvere, con ovvia utilità anche pratica.*

## 2. Dimostrare: ma anche congetturare

*Quanto detto, sia pur succintamente, contro la contrapposizione fra concreto e astratto, conduce in modo naturale, e analogamente, a rivalutare gli aspetti più attivi, più creativi (ma anche, e proprio per ciò, più avventurosi, fantasiosi, soggettivi) del nostro modo di pensare. Il rigido e impeccabile ragionamento deduttivo non può (né dovrebbe; altrimenti esorbiterebbe dal campo su cui si estende il suo diritto di sovranità) condurre a nessuna conclusione “nuova”, cioè non già implicitamente contenuta nelle premesse.*

*Il suo impiego, tuttavia, risulterà talora “costruttivo”, nel senso che condurrà a dimostrare che, in una data teoria, da certe ipotesi discendono delle conclusioni che non si sapeva in precedenza vi fossero implicitamente incluse (ma lo erano). A questo scopo si può arrivare per caso, deducendo dalle premesse tutte le combinazioni di conclusioni e combinazioni di combinazioni (ma occorrerebbe pur sempre una certa penetrazione per riconoscere, tra innumerevoli conclusioni irrilevanti, quelle che costituiscono una “scoperta” (e per dire se appare più o meno importante). E in genere, infatti, il processo è opposto: si parte da delle “congetture”, ossia da affermazioni che a qualcuno (o a molti) sembra debbano risultare vere come conseguenza delle premesse accettate. Purtroppo, un falso pudore vieta in genere di menzionare la parte del processo della scoperta che si svolge più o meno nella sfera dell'inconscio, o del subconscio, per esibire soltanto la dimostrazione fossilizzata nella sua forma scheletrica di logica freddamente deduttiva e formalistica.*

*Occorre non solo riconoscere l'insostituibile funzione del ragionamento inconscio che permette di individuare congetture e di immaginare tentativi di sviluppi logici atti a far raggiungere la conclusione. Ciò è stato vigorosamente illustrato e raccomandato da Polya, dicendo che si deve non solo insegnare a dimostrare, ma anche allenare a congetturare (“Let us teach proving, but let us also teach guessing!”). Tra l'altro, questa è la prima occasione in cui si può rilevare l'importanza di sviluppare il senso della probabilità: la probabilità, o attendibilità, che attribuiamo all'esser vera di una congettura. E si tratta, naturalmente, di probabilità in senso soggettivo; ciò che (a mio avviso; vi ritornerò più avanti) non costituisce un fatto anomalo, dato che non appare giustificata in nessun caso la pretesa di dare alla nozione di “probabilità” un significato oggettivo, indipendente dalla valutazione di un dato individuo, basata su quanto egli sa e non sa, sul modo in cui giudica, immagina, prevede, e in base al quale pensa di regolarsi nelle decisioni che comportino rischi dipendenti dal risultato degli eventi in oggetto.*

## 3. Il “rigore”: come, quando, perché

*Il rigore è indubbiamente necessario, ma la mania del rigore è spesso controproducente. Una dimostrazione ineccepibilmente logica, valida sotto condizioni estremamente generali, è in genere complicata e priva di prospettiva, nascondendo il concetto intuitivo essenziale nella foresta di minuzie occorrenti solo per includere o casi marginali o estensioni smisurate. È certo cosa migliore e più saggia (come diceva Enriques) fare acquisire una visione intuitivamente chiara e insieme logicamente rigorosa dei casi corrispondenti alle condizioni a ciò più idonee. Basterà poi informare, se del caso, e più o meno diffusamente, su cosa continua o non continua a valere sotto condizioni diverse (magari anche indicando – en passant – quella dimostrazione generale che si ritiene controproducente infliggere come punto di partenza).*

Polya afferma ad esempio, per sua esperienza diretta (ripetuta nei molti paesi d'Europa e d'America ove ha insegnato) che è controproducente insegnare agli ingegneri l'analisi con gli  $\epsilon$  e  $\Delta$  (vedasi citazione in *Periodico di Matematiche*, 1974, n.1-2, p.116); Enriques rileva come certe precisazioni (benchè esatte) oscurino la comprensione di un enunciato (cfr.n.stesso P.d.M., a p.115 il "pezzullo" Difetti della Perfezione), e come certe dimostrazioni lunghe e complicate non aiutino a capire il perchè della validità del risultato ma obblighino soltanto ad accettarlo "obtorto collo".

Gli esempi al riguardo si potrebbero moltiplicare. Non per dimostrare che si deve o può trascurare il rigore, ma per far riflettere che esso non va considerato "in vitro", bensì in funzione della formazione nei discendenti di una visione corretta, ma anche chiara e intuitiva, delle teorie studiate in astratto e delle loro pratiche applicazioni concrete.

In particolare, per ritornare sulle definizioni e dimostrazioni mediante  $\epsilon$  e  $\Delta$ , occorrerebbe sempre curare di renderle intuitive mediante esempi e controesempi e con espressive illustrazioni mediante figure (ben fatte!). Altrimenti le "dimostrazioni" si riducono a filastrocche verbali e a sequenze di passaggi fatti perdendo di vista il filo conduttore (come di chi cammini badando ad ogni passo dove mettere il piede, senza alzare lo sguardo per vedere se, proseguendo, arriva a una meta, e quale).

#### 4. Probabilità e statistica

La richiesta più sentita e diffusa, riguardo a miglioramenti nel tipo di preparazione, è, secondo l'opinione espressa in diverse relazioni e interventi, quella di dare un maggiore sviluppo, in tali corsi, ad argomenti di probabilità e statistica. Naturalmente, sottoscrivo in pieno tale richiesta, raccomandando però che la trattazione venga concepita nel senso più aderente alle effettive esigenze di una visione globale e concreta dei problemi. Occorre abituare a riflettere caso per caso, non basandosi (come purtroppo spesso si usa) su poveri schemi prefabbricati e stereotipati (metodi "ad hoc", Adhockeries come proposte di chiamarli I. J. Good) o, semplicisticamente, su rozzi "indici", "coefficienti", ecc.

Occorre allenare a valutare coscienziosamente le probabilità (sempre soggettive!), a impostare i problemi di scelta tenendo ben presenti gli aspetti economici (in senso lato) delle decisioni. Come esempio, si pensi all'impostazione corretta della "teoria delle decisioni" (basata sulla massimizzazione dell'utilità sperata) e all'importanza e chiarezza che in essa assume la nozione di "valore di un'informazione" con riferimento a una decisione (in senso economico: ben diverso da quello che si esprime come "quantità d'informazione").

La matematica non può essere, per gli studenti di altre scienze, una collezione di ricette da accettare "a scatola chiusa", bensì una componente della loro attrezzatura mentale, necessaria per proseguire in forma più approfondita, ove occorre, le stesse riflessioni che nel loro campo portano avanti senza di essa fin quando bastano immagini mentali più semplici e intuitive.

In seguito a spunti di discussione sulla nozione di probabilità ho dato chiarimenti su perchè ogni probabilità debba (a mio avviso) considerarsi soggettiva. In breve (non è qui il luogo per dilungarsi): ogni definizione pretesamente oggettiva presuppone un giudizio soggettivo.

La cosiddetta definizione basata su partizioni in "casi ugualmente probabili" richiede sia già acquisito, in senso soggettivo, il concetto di "uguale probabilità". E quella basata sulle frequenze richiede il medesimo circolo vizioso ed in più un'intuizione (necessariamente grossolana) di un nesso tra osservazione di frequenze e valutazioni di probabilità, nesso di cui soltanto un'adeguata elaborazione della teoria delle probabilità (soggettive) permette di stabilire il significato in base ad effettiva analisi delle circostanze in gioco.

#### 5. Mostuosità giuridico-burofreniche

In molti interventi è stata deplorata la situazione degli insegnamenti in questione (*Matematiche per altri Corsi di Laurea, Fac. Scienze*). Condivido in pieno le critiche, e sono lieto che alcuni

singoli lodevoli esempi mostrino che, ove vi sia della buona volontà, si può perfino riuscire a impostare tali insegnamenti in modo appropriato e intelligente. (Menzionerei come esempio – forse anche per il calore con cui l'insegnante, la prof. Metelli, ne ha illustrato gli intendimenti – il corso di Padova).

Contro il falso dilemma (per di più, a sfondo penosamente corporativo) se la Matematica ai Chimici (e così per altri) vada insegnata da un Matematico o da un Chimico, dissi che dev'essere insegnata o da un Matematico innamorato della Chimica o da un Chimico innamorato della Matematica. La Matematica non va insegnata come tale, né come mero strumento per particolari applicazioni alla Chimica; occorre invece che la scelta e il dosaggio degli argomenti, i riferimenti e gli esempi, tendano ad una fusione delle nozioni astratte prevalentemente con le interpretazioni familiari e necessarie per la Chimica e campi affini.

I docenti dovrebbero avere e sviluppare una mentalità fecondamente interdisciplinare, collaborare allo studio dei problemi matematici nella disciplina del corso di laurea ove insegnano, possibilmente anche nel campo della ricerca (e magari – marginalmente – anche in quello professionale). È chiaro però che ogni scelta appropriata e meditata dei docenti è resa impossibile e inconcepibile da tutta l'impalcatura di norme che affliggono, in Italia, l'Università (come tutta la Scuola e più in generale tutta la Pubblica Amministrazione), norme che possono ben dirsi burofreniche (in Francia si è usato un termine anche più crudo: burosadiche) e giuridicole (sintesi dei due termini, per 3/4 coincidenti, giuridico e ridicolo). Concordo con tutte le critiche fatte su questo e altri punti analoghi, e mi auguro che si possa provocare un moto di ripulsa, una "reazione di rigetto", che obblighi le Autorità "competenti" (?) a provvedere. Sarebbe urgente, urgentissimo!

PEZZULLI<sup>1</sup>

All'università, volendo registrare una lezione, uno studente sbagliò tasto: dal registratore uscì fuori un "can can" fragoroso. Bruno de Finetti fece un cenno per dire che la musica poteva continuare, e si mise a ballare sorridendo, alzando alcune volte i risvolti della giacca, al ritmo della musica.

Bruno de Finetti fu arrestato all'Accademia dei Lincei per aver pubblicamente appoggiato la causa degli obiettori di coscienza. Poi fu subito rilasciato. Era il 19 novembre 1977. All'uscita dell'Accademia un intervistatore chiese a Bruno de Finetti:

– Che vuol dire un episodio di questo genere per lei?

– Per me è il riconoscimento che non sono soltanto un matematico, sono anche un cittadino che si preoccupa delle sorti dell'Italia, ridotta in questo stato da governanti che non stimo.

- Bruno de Finetti apprezzava molto questa poesia:

C'è chi educa  
guidando gli altri come cavalli  
passo per passo;  
forse c'è chi si sente soddisfatto  
quando è così guidato.

C'è chi educa senza  
nascondere l'assurdo ch'è nel mondo,  
aperto a ogni sviluppo ma tentando  
di essere franco all'altro come a sé,  
sognando gli altri come ora non sono:  
ciascuno cresce solo se sognato.

DANILO DOLCI, *Il limone lunare*, Bari, Laterza, 1970, p. 154

<sup>1</sup> Quando de Finetti era direttore della Società italiana di scienze matematiche e fisiche «Mathesis» e della rivista «Periodico di Matematiche», inseriva quasi sempre, fra due articoli, alcuni "Pezzulli".

- le mie preferenze consisterebbero nel rendere tutto semplice, intuitivo, informale, e, se sollevo questioni "sottili", vuol dire che mi sembra proprio che non se ne possa fare a meno.<sup>1</sup>

#### BIBLIOGRAFIA

Oltre alle indicazioni riportate in nota nell'articolo, si ricorda che nel sito: <http://www.bruno-definetti.it/>, si può trovare la bibliografia quasi completa delle pubblicazioni di Bruno de Finetti ed altre interessanti informazioni.

Qui di seguito aggiungo unicamente la fonte dalla quale ho tratto le lettere di cui ho riportato molti passi e altre informazioni riguardanti i libri scritti da de Finetti.

BRUNO DE FINETTI (1944), *Matematica Logico-Intuitiva* (Nozioni di matematiche complementari e di calcolo differenziale e integrale come introduzione agli studi di scienze economiche, statistiche e attuariali), 1ª ed., E.S.T. (2ª e 3ª ed., Roma, Cremonese, 1957 e 1959. Ristampa Milano, Giuffrè, 2005).

\_\_\_\_ (1956), *Lezioni di matematica finanziaria*, Roma, Ed. Ricerche.

\_\_\_\_ (1957), *Lezioni di matematica attuariale*, Roma, Ed. Ricerche.

\_\_\_\_ (in collaborazione con F. Minisola) (1961), *La matematica per le applicazioni economiche*, Roma, Cremonese.

\_\_\_\_ (1967), *Il saper vedere in matematica*, Torino, Loescher.

\_\_\_\_ (in collaborazione con F. Emanuelli) (1967), *Economia delle assicurazioni*, in *Trattato Italiano di Economia*, vol. XVI, Torino, U.T.E.T.

\_\_\_\_ (1969), *Un matematico e l'economia*, Milano, F. Angeli, Ristampa Milano, Giuffrè, 2005.

\_\_\_\_ (1970), *Teoria delle probabilità* (Sintesi introduttiva con appendice critica), Torino, Einaudi, 2 volumi. Ristampa Milano, Giuffrè, 2006.

\_\_\_\_ (a cura di) (1976), *Dall'utopia all'alternativa*, Milano, Franco Angeli/La società.

\_\_\_\_ (1981), *Scritti (1926-1930)*, Padova, Cedam.

\_\_\_\_ (1991), *Scritti (1931-1936)*, Bologna, Pitagora editore.

\_\_\_\_ (1989), *La logica dell'incerto*, Milano, Il Saggiatore.

\_\_\_\_ (1995), *Filosofia della probabilità*, a cura di Alberto Mura, Milano, Il Saggiatore.

\_\_\_\_ (2006), *L'invenzione della verità*, introduzione di Giordano Bruno e Giulio Giorello, premessa di Fulvia de Finetti, Milano, Raffaello Cortina.

\_\_\_\_ (2006), *Opere scelte*, a cura dell'UMI e dell'AMASES, vol. I, pp. 698 e vol. II, pp. 522, Cremonese.

FULVIA DE FINETTI (2000), *Alcune lettere giovanili di B. de Finetti alla madre*, estratto da: «Nuncius, Annali di Storia della Scienza», Istituto e Museo di Storia della Scienza, XV, 2, Firenze, Leo S. Olschki Editore, 2000, pp. 721-740.

#### BRUNO DE FINETTI,

#### A MATHEMATICIAN OF GENIUS IN SERVICE OF SOCIETY (II)

SUMMARY: In the centenary of his birth, we try to give a complete picture of Bruno de Finetti's life, character, best scientific contributions in mathematics and economy, of his philosophy and his research in didactics.

<sup>1</sup> DE FINETTI B. (1970), *Teoria delle probabilità*, Torino, Einaudi, p. 5.

## NORME EDITORIALI / EDITORIAL RULES

*Contributi alla Rivista.* La Rivista accoglie scritti di carattere didattico destinati sia all'insegnamento universitario, sia a quello delle scuole (dalla primaria alla secondaria di II grado), che riguardino temi di demografia, probabilità, statistica.

I contributi devono essere inviati alla Prof.ssa Maria Gabriella Ottaviani, Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate, P.le A. Moro 5, 00185 Roma.

Indirizzo e-mail: [mariagabriella.ottaviani@uniroma1.it](mailto:mariagabriella.ottaviani@uniroma1.it).

I collaboratori sono invitati a notare i seguenti punti:

1. Gli articoli inviati alla rivista saranno sottoposti alla lettura di esperti per un giudizio sull'eventuale pubblicazione. Gli autori si assumono la piena responsabilità del contenuto degli articoli pubblicati sulla rivista.

2. Gli articoli di lunghezza non eccedente, di norma, le 20 cartelle (di 2500 battute per pagina) possono essere inviati in duplice copia alla redazione della rivista, su dischetto o CD, specificando il nome del programma e allegando eventuali font utilizzate per segni o simboli speciali; oppure, preferibilmente, sotto forma di file allegato ad un messaggio di posta elettronica.

Agli autori vengono inviate soltanto le prime bozze, che devono essere corrette e rispedito alla redazione nel minor tempo possibile (non più di 15 giorni). Non è possibile apportare correzioni di rilievo, aggiunte o modifiche in sede di correzione di bozze.

I riferimenti bibliografici, posti alla fine dell'articolo, devono seguire le norme seguenti.

Per i libri:

F. N. DAVID (1962), *Games, God and Gambling: A History of Probability and Statistical Ideas*, London, C. Griffin, pagina(e) citata(e).

Per gli articoli inseriti in riviste la citazione deve avvenire come segue:

O. ORE (1960), *Pascal and the invention of probability theory*, «American Mathematical Monthly», 15, pagina(e) citata(e).

Per gli articoli o contributi in Atti collettanei la citazione deve avvenire come segue:

A. ZULIANI (1972), *La regolarità scolastica nella fascia dell'obbligo: un utile indicatore per il sistema formativo*, in *Atti della XXVII riunione scientifica della Società italiana di statistica*, Palermo, pagina(e) citata(e).

Nell'ambito del testo la citazione deve avvenire come: (Ore, 1960).

In caso di tabelle e disegni, l'autore deve fornirli insieme al testo e indicarne la giusta posizione. Il formato massimo delle tabelle è di cm 12,7 × 19,5.

Eventuali figure devono essere fornite in bianco/nero in formato .tif o .eps con una risoluzione di almeno 600 pixel.

L'autore deve inoltre indicare posto di lavoro e indirizzo come nota all'asterisco del proprio cognome.

Per eventuali approfondimenti per le citazioni le Norme editoriali della Casa editrice sono consultabili e scaricabili alle pagine 'Pubblicare con noi' e 'Publish with us' del sito Internet [www.libraweb.net](http://www.libraweb.net).

L'autore farà seguire alla bibliografia il titolo e il riassunto dell'articolo in lingua inglese (circa 10-12 righe)

3. La collaborazione alla rivista non è retribuita e gli autori degli articoli rinunciano, in favore della testata, alla proprietà letteraria dei loro articoli.



Gli autori riceveranno gratuitamente un fascicolo della rivista in cui compare il loro contributo e il file in PDF del contributo medesimo.

*Recensione libri.* Le opere per recensione devono essere inviate alla redazione della rivista.

COMPOSTO, IN CARATTERE DANTE MONOTYPE,  
IMPRESSO E RILEGATO IN ITALIA, DALLA  
ACCADEMIA EDITORIALE<sup>®</sup>, PISA · ROMA

★

*Gennaio 2008*

(cz2/fg13)

