

INTORNO ALLA MATEMATICA

Incontro del Prof: Carlo Felice Manara con un gruppo di universitari.

Appunti non rivisti dall'autore, gentilmente concessi da mamma Elena detta Nena.

Queste tre, Elena, Silvia e Fulvia, sono venute a casa mia e mi hanno fatto un piccolo tradimento, perché io speravo di incontrare una dozzina di persone e invece mi trovo a dover montare in cattedra e parlare a molta gente; ma pazienza, dovevo aspettarmelo...ma ci casco regolarmente.

Dunque, il discorso che ho fatto con loro quando sono venute - ho fatto un po' di brontolamenti: c'era anche mia figlia Raffaella e mi ha detto chiaramente che sono un vecchio brontolone, come è vero - però mi ha fatto tornare indietro di molti anni a ripensare, a ricordare le difficoltà che ho incontrato io tanto e tanto tempo fa, quando sono passato dal liceo all'università. Difficoltà che poi mi hanno seguito durante pressappoco tutta la carriera perché ho cercato di ovviare, di aiutare le matricole...mi rendevo conto del fatto che le difficoltà che avevo affrontato io erano anche di tutti coloro che dalla scuola secondaria passano all'università. E allora sono andato - ricordo, ero in città diverse da questa - a rompere le scatole ai colleghi di psicologia per domandare se ci fossero, che so io, degli studi, delle possibilità di chiarire o di aiutare in qualche modo, o di identificare il carattere del matematico, la fisionomia, in maniera da cercare di aiutare quelli che magari hanno scelto una strada sbagliata, e poi si trovano infilati in un imbuto da cui non sanno uscire. Non è che abbia avuto molto aiuto, per la verità. Poi però queste riflessioni sono risalite in superficie, nonostante questi fallimenti, quando mi è capitato di leggere la conferenza di Poincaré; ecco, qui vedo citato Poincaré, mi ha fatto tornare indietro di tanti anni...a quella conferenza di Poincaré molto intelligente, come tutto quello che faceva lui, la famosa conferenza del 1900 in cui Hilbert propose i suoi celebri problemi. Poincaré fece anche lui una conferenza sulla psicologia dei matematici, e divise i matematici in due grandi categorie, quelle che lui chiamava i geometri e gli analisti; dicendo anche in più che non è la materia che si insegna quella che fa il carattere del matematico: si può fare la geometria con la mentalità da analista e si può fare l'analisi matematica con la mentalità del geometra. E come esempio di geometra che lo era addirittura in modo ostentato e provocatorio, portava Vittorio Poncelet, uno dei creatori della geometria proiettiva, come voi ben sapete (quando dico che voi ben sapete, vuol dire che son convinto che non lo sapete, ma non importa, è sempre una cosa che io dico).

Il Poncelet, come voi ben sapete, era un francese, come dice il suo nome, era un ufficiale dell'esercito di Napoleone in Russia; preso prigioniero, dato per morto, ripescato in mezzo a tanti altri quasi morti perché era vestito da ufficiale e quindi salvato perché si sperava di ottenere da lui delle informazioni. Rimase prigioniero in Russia per qualche anno, credo (non mi ricordo più e non voglio raccontare delle balle). Però risalì alla superficie controcorrente, contro la situazione così miserabile in cui si trovava, cercando di ricostruire gli insegnamenti di matematica che aveva avuto all'Ecole Polytechnique, quella che allora era la scuola di preparazione degli ufficiali e degli ingegneri, la classe dotta, diciamo, francese. Non so se sia stata fondata proprio da Napoleone o addirittura se fosse invece un'eredità del regno; ad ogni modo, lo rifece tanto bene, senza libri, senza colleghi che gli rompevano le scatole, che inventò la geometria proiettiva; cioè ritornò quei *Cahiers de Russie*, quaderni di Russia, che sono uno dei punti di partenza dell'impostazione di quello che il mio maestro, Chisini, ci presentava come il metodo di Poncelet. Che poi, diciamo, fu il germe dell'evoluzione della geometria, quello che io penso - badate che quello che io dico non sono cose ufficiali, se mi sentono i miei colleghi certamente non saranno d'accordo con me; ma pazienza, ormai io sono abituato a non esser d'accordo con loro quindi siamo pari - quello dell'evoluzione della geometria nel secolo scorso, nel secolo XIX; che fu uno dei punti scatenanti di tutta una rielaborazione e ri-meditazione sui fondamenti dell'intera matematica, a mio parere. Bene, il Poncelet era, per Poincaré, un geometra tipico, uno di quelli che intuiva le verità, intuiva le relazioni

e poi ci arrivava per dimostrazioni. Invece come esempio di analista mi pare che Poincaré abbia portato Hermite (non so se dico bene il nome o se è proprio lui perché non mi interessano tanto gli analisti, per la verità. Il Poncelet son sicuro, quell'altro è un analista che Poincaré ha portato come modello tipico, ma non è che io sia tanto informato o che abbia tanto a ricordare). Quindi Poincaré, essendo una persona intelligente, era arrivato ad analizzare diverse fisionomie intellettuali, diversi atteggiamenti nell'impostare la ricerca matematica. C'è poi un libro molto interessante, che mi pare sia di Hadamard, sulla psicologia della ricerca e dell'invenzione matematica, anche quello è molto interessante; alla fine poi, più recentemente, ho trovato il libro di Gardner sulle varie fisionomie intellettuali, quello che è tradotto da Adelphi con un titolo latino, *Formae Mentis*. Gardner elenca addirittura sette, mi pare, tipi di intelligenze, non graduandole grazie al cielo, e l'intelligenza di tipo fisico-matematico è soltanto uno di quei tipi.

Ecco perché mi spiego che tante volte, quando ero molto più giovane e forse più ingenuo di ora, mi domandavo "Ma come fai a non capire? Ma come mai, ma te lo spiega, ma non capisci?!" Evidentemente ci sono delle conformazioni intellettuali che trovano certe particolari difficoltà in certe che sono le caratteristiche della matematica. Io non so che cosa sia la matematica, la studio ma non so cosa sia... Mi ricordo un piccolo incidente quando, lavorando con i colleghi della scuola elementare, c'era un pedagogo il quale ragionava in questo modo con me; diceva: "Tu sei un matematico" "Beh, cerco di esserlo" "Allora, devi dire che cos'è il numero, così lo diciamo a questa gente qua" "Non lo so cos'è il numero, lo confesso" "Ma come, sei un matematico e non sai cos'è un numero?" "No, non lo so". Ci son voluti secoli e secoli di critica perché arrivasse un certo signor Peano, figlio di contadini del cuneese, il quale coi suoi celebri assiomi impostò un nuovo modo di vedere l'aritmetica e il concetto di numero. E per la verità, quando sono andato a cercare nell'opera di Peano, non ci ho mai trovato una frase del tipo "Il numero è...": dà degli assiomi, c'è un caso tipico di definizione per postulati, o definizione per assiomi, se voi volete; lui non li chiama assiomi, lui li chiama proposizioni primitive sottolineando il fatto che le sceglie come punti di partenza, ma se ne possono scegliere anche delle altre. "Beh, allora se non sai cos'è il numero..." Lui voleva che io stilassi una frase da insegnare a memoria poi ai maestri, e i maestri andassero poi a raccontarla nelle scuole elementari: io mi rifiuto di fare una cosa di questo genere, a parte il fatto che non so cosa sia il numero - so contare, però, un pochino, e questo mi basta, da un certo punto di vista. "Allora devi dirmi che cos'è la matematica": eh, questo ne so ancora meno!

Allora la collaborazione si rompe in quel momento, ovviamente, perché lui pretendeva da me - per insufficienza mentale da parte mia! - pretendeva da me delle cose che io non ero in grado di dargli, perché mi rifiutavo di insegnare delle cose da dettare a verbale o dettare sugli appunti in maniera che loro potessero, i clienti potessero andare a raccontarlo e a farlo ripetere a dei ragazzini. Questo è un atteggiamento nell'insegnamento che io mi sono sempre rifiutato di prendere, ma proprio per insufficienza da parte mia. Allora, ecco che così mi si apriva un po' la spiegazione di certi fenomeni che per me erano stati degli inciampi, erano stati dei fenomeni strani, come mai certa gente anche del resto intelligente... Mi ricordo certe discussioni che facevo col collega, rettore dell'Università di Modena, che era un professore di diritto romano; e alla fine, dopo esserci accapigliati con i verbali, con le circolari, eccetera eccetera, si parlava, così, del più e del meno; e lo sentivo far dei ragionamenti e gli dicevo "Tu hai fatto un ragionamento matematico!" (tipico del giurista intelligente: partire da certe ipotesi, attenersi strettamente alle definizioni, dedurre rigorosamente). "Ah, per carità, non ho mai capito la matematica!". Figuriamoci, ha fatto un ragionamento di stile matematico e dice che non ha mai capito..." Ah, non ho mai capito la matematica!". E così ho incontrato varie altre persone che hanno avuto una reazione di rigetto, di allergia, di antipatia, di nausea nei riguardi della matematica. O meglio, nei riguardi di un certo tipo di insegnamento della matematica, che riduce la matematica alla manovra di un insieme di simboli, alla manovra di un insieme di procedure e all'applicazione di un certo insieme di formule.

Allora, se noi vogliamo ritornare a un discorso, che è quello che più mi interessa da questo punto di vista, di aiutare le matricole ma in generale anche gli altri studenti, ad ambientarsi bene, a non far la

fatica che ho fatto io nei primi anni...Perché per la verità, pensate, ho detto anche qui alle tre congiurate, quando io mi sono iscritto alla facoltà di scienze dell'Università di Milano c'era un solo corso biennale di fisica che era seguito da tutti gli studenti della facoltà, che stavano tutti - matematici, fisici, fisici matematici, biologi, ecc. - tutti stavano in quell'aula Chisini del pianterreno dove appena appena ci stanno le nostre matricole di matematica (ci stavano, adesso mi dicono che sono molto poche). E il professor Polvani, che poi è diventato mio collega - cioè, io sono diventato suo collega, - uomo intelligentissimo, faceva delle lezioni veramente straordinarie, ma lui faceva il suo corso biennale; e chi arrivava alla meccanica era abbastanza fortunato, chi arrivava all'elettricità cioè alla seconda parte restava seduto in braghe di tela per terra. Effettivamente lui cominciava a esporre l'elettricità e andava avanti per conto suo; libri non ce n'erano ovviamente, dispense meno che meno - sì, c'erano delle dispense ignobili, stilate da qualcuno, una cosa indegna - citazioni bibliografiche..."Sì, vada a vedere sull'*Album der Physik*": l'*Album der Physik* (allora vigeva il tedesco, non l'inglese) erano 7-8 volumi, io non ci trovavo mai quello che lui faceva. Lui faceva delle cose assolutamente in modo nuovo, la termodinamica poi l'ho ritrovata sul libro scritto da Fermi in un modo assolutamente moderno ovviamente, per l'epoca; insomma, faceva degli strani disegni sulla lavagna che poi ho saputo che erano integrali, perché noi, ligi al corso di analisi matematica, figuriamoci, dopo mesi eravamo a parlare della derivata e delle formule del Taylor, con il resto di Schlemischer???-Roch, di Cauchy e di Lagrange ecc. ecc., e coi criteri di convergenza delle serie - c'è un criterio, mi pare, di Kummer, uno di Ra-Abel e cose di questo genere. Avevamo le funzioni che sono un po' continue un po' no, quelle che sono continue a destra e non a sinistra, quelle che sono continue nei mesi con la r e non nei mesi senza la r ...derivate non sapevamo neanche cosa fossero! Poi quei serpentine sulla lavagna, insomma...Dei simboli scritti col distorto...derivate parziali, boh, cosa fossero...Delle espressioni, mi parlavano di differenziale esatto: poi sugli appunti di qualche mia compagna ho trovato che "è proprio un differenziale", cioè da noi si capiva che fosse esattamente un differenziale. Mi son trovato in questa melma, in questa poltiglia, veramente, per riuscire ad ambientarmi, a cavarmi fuori...poi mi son buttato, naturalmente, sulla geometria e sulla meccanica razionale perché almeno lì qualche cosa che avesse un senso compiuto, diciamo fisicamente comprensibile, c'era, no? Allora, io vorrei risparmiare questo; per molti anni ho cercato, scambiando le idee con i colleghi, cercando di modificare - modificare: figuriamoci se si modifica qualche cosa nell'università italiana, - cercando di proporre qualche cosa; sono riuscito soltanto a far sopprimere...non far sopprimere: io ero dalla parte di quelli che han votato la soppressione del corso di chimica: non capisco perché per esempio uno che studia matematica debba fare un esame di chimica al primo anno, ecco. Chimica al primo anno: ancora adesso ricordo l'incubo terribile di quell'esame da preparare con delle cose che non mi piacevano per nulla; non so, ricordo ancora, mi pare, che lo zolfo ha tre forme allotropiche e a una certa temperatura cambia dall'una all'altra...una cosa terribile, che non riuscivo a capire...Eppure, va be', con gran fatica, enorme, ho preparato quell'esame. Allora mi domando: che cosa si può fare, che cosa posso dire io per aiutare, per cercare di orientare le persone?

E' chiaro che a un bel momento, e qui il mio intervento prende la forma di predica, a un bel momento lo studente universitario deve imparare, gli si fa credito: noi gli facciamo credito, ma lui deve restituire, deve rispondere a questo credito. In sostanza, non ha più un orario, non ha l'obbligo di presentarsi a tutte le lezioni o snocciola giustificazioni paterne, eccetera: deve imparare a gestire il proprio tempo e la propria fatica, e a gestire anche la propria personalità. Deve imparare a far gli appunti: questa è un'arte che si impara...quasi non si impara mai, ma si deve poter imparare in qualche modo, ci son degli appunti sovrabbondanti, con tanta roba inutile...Deve imparare a sintetizzare, a rimeditare sulle cose che ha visto e che ha ascoltato, non dico che abbia imparato, che ha ascoltato, insomma. Deve imparare a rendersi conto, deve imparare a guardar le cose, anche i libri; ci sono intere biblioteche! Qualche volta, mi ricordo, io, tutta la curiosità di vedere come la racconta quell'altro: sì, a me me l'hanno raccontato così. ma io voglio sapere come la racconta quello là! Allora, ampliare il proprio punto di vista, non limitarsi ai manuali, cercare di progettare

anche; ma soprattutto cercare di lavorare, perché la matematica, l'unica cosa che posso dire con sicurezza, è una cosa molto indigesta, molto, molto indigesta, che quindi dev'essere digerita col tempo. Tante volte si ritorna su un problema abbandonato perché disperatamente difficile per noi, si ritorna dopo qualche mese e ci si dà degli stupidi perché la soluzione è lì; oppure ci sono delle formule che si memorizzano senza capirle granché e si capiscono soltanto dopo; ma la fatica rende, è una fatica di cui siamo consci quando la facciamo, c'è un'evoluzione mentale - almeno, a me capita così - c'è un'evoluzione mentale che è a noi quasi inconscia. A me è capitato tante volte, ancora oggi mi capita di ritornare su letture che mi son state ostiche e di trovarle quasi naturali, perché evidentemente nella mia testa, senza che io me ne accorga, qualche cosa è andato a posto. Però la fatica deve essere fatta. Non c'è, e in questo aveva ragione il vecchio Euclide, a quel re che gli chiedeva - era un Tolomeo, mi hanno detto gli storici - di fargli la matematica "a fumetti", di fargli la matematica facile, diceva "non esiste via regia". Anche i re devono fare la stessa fatica che facciamo tutti noi per capire, per memorizzare...e per risparmiare la fatica. Io mi ricordo che quand'ero al liceo sono stato, diciamo, non affascinato - è una parola troppo pesante, non mi piacciono, - sono stato ammirato per esempio da quella poca geometria che si faceva a quell'epoca nel liceo classico. Avevamo il testo di Enriques e Amaldi che era un'eredità di casa mia, figuriamoci, aveva la data di edizione del 1916, l'anno in cui sono nato, con gli esercizi; e mi ricordo il fascino della dimostrazione, per esempio, dei punti notevoli di un triangolo, il vedere che 'ste rette passano per un certo punto, ci devono passare, non possono far altro che passarci! E' una cosa che a quell'epoca, mi ricordo ancora, mi ha meravigliato, come pure ricordo l'insoddisfazione, che mi spiega l'insoddisfazione del mio collega pedagogista, quando si faceva il concetto di area, l'equivalenza: a ben pensarci, guarda un po', questo qui mi racconta quando e come e dove due poligoni sono da dirsi equivalenti, c'è da dire che hanno la stessa area: sì, ma che cos'è l'area? Non c'è una frase "l'area del poligono è...". Allora sono andato a vedere il libro di Euclide dove parla delle proporzioni e ti dice le grandezze...non ti dice mai cos'è il rapporto tra due grandezze omogenee, ti dice quando due grandezze omogenee stanno nello stesso rapporto di altre due. Oh che bello. Allora qui evidentemente si stava insinuando quell'insoddisfazione che è tipica di chi si urta con i fondamenti di un certo pensiero e deve accontentarsi delle definizioni assiomatiche, delle definizioni per assiomi o per postulati; mai una frase che ti dica "il numero è...": ti dice ecco, questi qui son gli assiomi dei numeri, come funzionano. Allora tutta quella fatica che avevo fatto, poi quando sono arrivato all'università e ho incontrato la geometria proiettiva l'ho vista svanire da un certo punto di vista, perché tutti quei punti notevoli di un triangolo diventavano un solo teorema che è il teorema del quadrangolo: metto sulla retta all'infinito una certa involuzione e viene un certo punto notevole del triangolo, ne metto un'altra e ne viene un altro. Allora tutti venivano raggruppati sotto uno stesso capitolo. Sono andato poi a leggere sullo Stout, ??? (lo Stout, lo dico sempre, ha scritto il famoso suo libro, geometria di posizione, ???; senza una figura, perché diceva che la figura particularizza la generalità del concetto, e quindi lui riteneva - in buona fede, io spero - che la figura non aiutasse ma anzi bloccasse. Non so quale fosse il parere degli studenti, o se lo capivano, insomma, non lo so, o se lo ringraziavano per questo, non lo so); ricordo, ad esempio, il teorema dei triangoli omologici, la coppia dei triangoli omologici, tutta la fatica per stare a dimostrare che se ho due triangoli in una posizione tale che le coppie di vertici omologhi stanno allineati, allora le coppie di rette omologhe si incontrano in tre punti allineati. Bello, però se una va a vedere cosa dice Stout, dice che la figura della coppia di triangoli omologici è la sezione del pentaedro completo dello spazio. Oh bella, se tu prendi in uno spazio 5 punti indipendenti, tu hai 10 rette e 10 piani, sechi con un piano ed hai sul piano 10 punti e 10 rette. E allora, quella figura che viene dimostrata faticosamente con discorsi più o meno facili da seguire e più o meno noiosi, diventa immediatamente una figura che non ha più una simmetria di tipo fisico, come i poliedri regolari, ma una simmetria che è di tipo logico; è una configurazione, come suol dirsi: per ogni punto passano tre rette e su ogni retta stanno tre punti. Allora io vedo non una coppia di triangoli omologici, ma 10 coppie di triangoli omologici nella medesima figura, senza far fatica, cioè risparmiando un po' di

fatica. Io mi ricordo che una volta, tanto tempo fa, mi hanno invitato a presentare quel libro di Hadamard di cui vi ho parlato, e c'erano anche dei medici psicologi - ricordo, uno era il Caraccio, l'altro era il Musatti - e non so chi dei due mi disse che noi matematici siamo degli scompensati, dei *refoulé*, come diceva lui, perché "questo si vede nel vostro vocabolario: per esempio, voi non dite che un punto sta su una retta, dite che il punto giace sulla retta; voi non dite che una figura ha una certa proprietà, dite che una figura gode di una certa proprietà; voi non dite che un certo numero dice un'equazione, dite che il numero soddisfa l'equazione". Così ha tirato avanti analizzando il vocabolario e il modo di parlare dei matematici, e veramente mi ha fatto un po' pensare! Ad ogni modo, si vede; questo mi è venuto in mente parlando appunto di quella simmetria che non è semplicemente che si vede, ma è una simmetria, quella delle configurazioni (per esempio, la configurazione di Pappo-Pascal) che si gode con l'enunciato, godendo della simmetria logica dell'enunciato, godendo del risparmio di fatica intellettuale che ti dà un enunciato simmetrico. Ecco, da questo punto di vista mi ricordo, il discorso che ci faceva il mio maestro Chisini a proposito del metodo di Poncelet era proprio un pochino questo, cioè leggere le proprietà proiettive della figura su una dimostrazione fatta con gli strumenti della geometria elementare. Mi ricordo quando ci presentava il teorema di Steiner: il teorema di Steiner per la circonferenza è una proprietà elementare, proprietà assolutamente elementare degli angoli di una circonferenza, però se uno la legge in termini di corrispondenza, se uno la legge in termini di geometria proiettiva, ecco che diventa allora una proprietà di tutte le proiezioni del cerchio, quindi di tutte le coniche. Senza far la fatica di dimostrarla per ciascuna di quelle!

Su cosa vuol dire dimostrare devo dire anche questa, non c'entra, apro una parentesi: quando, tanto tempo fa, io e l'amico Dedò dirigevamo il periodico di matematica di Zanichelli, ci capitava di ricevere dei manoscritti spaventosi, cose dell'altro mondo; perché gli inventori dell'acqua calda o gli inventori, che so io, della quadratura del cerchio, delle dimostrazioni del postulato delle parallele, questa qui era roba di tutti i giorni...E veramente eravamo sommersi da questi, io avevo cominciato a fare una specie di archivio che poi ho perso da qualche parte perché veramente mi sono cadute le braccia. Mi ricordo ancora adesso il manoscritto che ci è venuto da un professore - questa è la cosa che mi ha fatto più piangere - da un professore, non dico da dove veniva, da quale parte d'Italia veniva. Il titolo del manoscritto era "Una grave lacuna nei testi di trigonometria" - oh, porca miseria! La trigonometria è una tale massa di stupidaggini...Diceva che in tutti i libri di trigonometria che lui ha consultato, il teorema di Carnot, quello che $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$, è dimostrato solo per il lato a! Signore benedetto, ma questo qui insegna la matematica da tanti anni, è alla vigilia della pensione! E lungo tutto il manoscritto aveva fatto delle dimostrazioni complicatissime del teorema di Carnot anche per il lato b e per il lato c! Ora, queste qui sono cose che veramente sono un po' tristi - ci fanno ridere, ma sono tristi, perché una persona che insegna matematica per un'intera vita e ci fa di questi discorsi veramente è un fallimento per la scuola italiana; non dico per gli studenti, per loro che valesse solo per a o solo per b o solo per c, loro se ne fregano altamente, dimenticano quelle formule e buonanotte - ma voglio dire, lo spirito del discorso della dimostrazione, lo spirito della generalità conseguita attraverso la felice scelta dei simboli e conseguita attraverso quella superiorità di movimenti che ti dà la possibilità di dire le cose da un punto di vista generale, è andato tutto perso! Che è il gusto della matematica: con poche cose dirne tante. Ecco, io mi accorgo, le poche volte che riesco ancora a risolvere qualche problema - roba del tutto elementare, intendiamoci - mi accorgo che poi, riflettendo sulla strada che percorro per trovare una risposta ragionevole, una risposta giusta, molto spesso mi accorgo di due cose: la prima è che tendo a dare una rappresentazione spaziale geometrica agli enti, altrimenti non me la cavo più, dalle formule non me la cavo. Secondo, che molta parte della fatica che faccio è cercare i nomi giusti, cioè cercare i nomi dei punti che possano poi permettermi di risparmiare la fatica nei calcoli, di risparmiare i pericoli nelle verifiche, ecc. Quindi un pochino, sempre inconsciamente, c'è questa abitudine a un tipo di schematizzazione che più o meno fa parte della fisionomia intellettuale di determinate persone. Allora ecco qui il discorso di quel Klein che qui è nominato in queste

domande, il discorso del Klein della ricerca dell'invariante rispetto a un gruppo di trasformazioni, l'importanza dell'idea di utilizzare la struttura matematica di gruppo, una delle prime strutture matematiche non tradizionali perché non soddisfa tutte le condizioni di simmetria o di permutabilità dell'algebra abituale. Ricordo, sono andato a vedere per esempio il lavoro interessantissimo di Pieri sui fondamenti della geometria: Pieri era uno scolaro di Peano molto intelligente che costruisce la geometria scegliendo certi fondamenti, utilizzando sostanzialmente, dico io adesso rivedendolo a distanza di tempo, le trasformazioni. Trasformazioni, insomma i movimenti rigidi, in sostanza. E' poco conosciuto perché usa il simbolismo logico di Peano, che era illeggibile per i matematici suoi contemporanei. Il professor Ascoli, che insegnava analisi matematica, disse una volta una cosa estremamente giusta: che Peano stendeva i reticolati invalicabili del suo simbolismo logico per nascondere i teoremi veramente importanti che dimostrava; quindi il risultato è che per esempio il teorema di esistenza delle equazioni differenziali, dei sistemi di equazioni differenziali, col suo simbolismo e col suo modo di esprimersi (lui parlava di numeri complessi, che noi oggi chiameremmo spazi vettoriali, ad esempio) lui il teorema l'ha dimostrato qualche anno prima di Picard, per esempio, tanto che le persone che fanno finta di non sapere che esistesse Peano dicono teorema di Picard, qualcuno si slancia a dire teorema di Peano-Picard: dovrebbe essere teorema di Peano, ma nessuno l'aveva letto perché lui pubblicava con quel simbolismo che allora era illeggibile, e oggi naturalmente è il simbolismo logico che è adottato dalle scuole anglosassoni. Allora, questo discorso di Klein: per noi è diventato ormai, per i corsi di algebra che abbiamo, una cosa normale il concetto di gruppo; ma se noi andiamo a leggere i classici del secolo scorso, il Pieri ci mette pagine e pagine per spiegare 'sto concetto, e non usa mai il termine gruppo perché evidentemente non era in uso a quell'epoca, oppure lui non lo voleva usare non so per quale ragione, o di scuola o di altro. Noi abbiamo gli strumenti algebrici (il concetto di gruppo, per esempio), che ci permettono di codificare in qualche modo quello che potrebbe essere chiamato il procedimento di astrazione o di equivalenza, la costruzione di classi di equivalenza in un insieme quando è dato un gruppo di trasformazioni dell'insieme su se stesso, per esempio. Oggi è una cosa che anche le matricole dovrebbero poter capire, insomma. Non che io disprezzi le matricole, tutt'altro: quando gli avranno fatto il lavaggio del cervello, come diceva il mio caro amico Melzi, allora poverini diventeranno un pochino meno intelligenti, ma quando son matricole sono abbastanza intelligenti. Scherzo, naturalmente.

Ritornando quindi al discorso di partenza, perché voglio chiudere il cerchio, il discorso dell'impatto con l'ambiente universitario: è chiaro che l'insegnamento universitario necessariamente deve essere parcellizzato, vi ho raccontato le fatiche fatte, la storia dei corsi di fisica seguiti da me col professor Polvani; necessariamente dev'essere specializzato, con una specializzazione così profonda e così spinta che all'utente, che è lo studente, appare come una sfarinatura, come un ridurre in sabbia tutto l'edificio. Spetta naturalmente, e questa è una cosa che dobbiamo imparare a fare, spetta a noi rifare la sintesi, cercare in qualche modo di costruire o di formarci un'idea generale. Questo non potete pretendere dall'università, che vi conduca con le dande, che vi dica "devi far questo, devi far quell'altro": no, siete affidati alla vostra responsabilità personale, alla vostra gestione personale del vostro tempo e della vostra fatica - perché fatica è, intendiamoci, non voglio nascondere. Fatica è, ma naturalmente bisogna farla, non si può pretendere che le cose vengano messe in bocca, la pappetta, sminuzzate nei minimi particolari. No, bisogna che ciascuno faccia, secondo anche la propria fisionomia intellettuale. Perché bisogna anche dire che ciascuno ha un proprio modo per organizzare le conoscenze, ha un proprio modo per ridurre a unità. Non possiamo pretendere che ce lo facciano gli altri, dobbiamo sforzarci noi di costruire dentro di noi una certa sintesi, una certa unità, anche se la cosa ci costa molta fatica, che può durare anche mesi e anche anni, intendiamoci. Ma non possiamo pretendere dall'istituzione quello che l'istituzione non ci può dare; e non ci può dare per la natura stessa della scienza di oggi. Una volta si poteva insegnare filosofia, medicina e matematica: il grande Ruffini, quello del teorema di Ruffini, che è stato rettore dell'Università di Modena a metà del secolo scorso, insegnava medicina, filosofia e matematica, ma era la scienza di

allora, e si poteva...un uomo così intelligente, che poi tra l'altro è stata la sua sfortuna, perché ha dimostrato quel certo teorema vero e i matematici non lo prendevano sul serio, perché cosa vuole questo medico qui, che ci viene a raccontare a noi come si fa la matematica, e invece aveva ragione lui! Ma a parte questo - poverino le sue vicende sono veramente un po' tristi - era una cosa che si poteva fare in un certo periodo della storia. Oggi non si può, è uno sforzo che è affidato a noi. Ma uno sforzo che noi dobbiamo imporci, dobbiamo cercare di programmare. Io mi ricordo che una volta al mio Rotary ero in un tavolo di cinque persone; le altre quattro oltre a me, povero diavolo di pensionato, erano tutti ingegneri, chi direttore d'azienda, chi grande professionista, ecc. E allora ho fatto una specie di sondaggio d'opinione, in malafede l'ho fatto, tutta gente che guadagnava almeno quattro, cinque, sei, dieci volte la mia pensione. Dico: "Avete studiato al Politecnico?" "Sì" "Vi è mai capitato, nella vostra vita professionale di guadagnatori di quattrini, di utilizzare tutta la matematica, analisi, geometria, del primo biennio del Politecnico?" La risposta fu, ovviamente, corale e immediata: "Mai". E questa è l'opinione che mi sentivo ripetere tanti anni fa, sessant'anni fa, dai colleghi del triennio di applicazioni del Politecnico: insegnate tante cose inutili. Tante cose inutili? Beh, vediamo, cosa vuol dire se una cosa serve o non serve? A parte la risposta scherzosa di cui ho detto prima di entrare in quest'aula, quando qualche volta incontravo qualcuno..."Cosa fa lei?" "Insegno" "Insegna cosa?" "Matematica" "Ah, e dove?" "All'università" "Al Politecnico?" "No..." Perché per il milanese normale, il milanese di buon senso, il milanese serio, esiste una certa gerarchia degli istituti universitari milanesi: il primo è il Politecnico, gli ingegneri fan le cose veramente serie, poi c'è la Bocconi, eccola lì, l'università dei ragionieri, anche questi, perché i danari...poi c'è la Cattolica, anche quella, sai, i preti..."Ma no, dico, guardi, c'è anche un'università..." "Ma tu guarda, toh!" Mi ricordo, quand'ero preside di facoltà c'era il collega Salvetti che era a Roma distaccato, e riceveva regolarmente, perché non aveva preso congedo dalla facoltà, riceveva regolarmente gli avvisi di convocazione del consiglio di facoltà, e faceva mandare un telegramma, evidentemente dalla segretaria. Questo telegramma era a volte intitolato Facoltà di Matematica e veniva regolarmente al Politecnico, oppure peggio ancora "seminario di matematica" e finiva al Seminario vescovile. Arrivava nelle mie mani circa quattro o cinque giorni dopo, quando io avevo fatto il verbale, ma lo sapevo; con l'annotazione "Sconosciuto in pza Leonardo da Vinci", "Sconosciuto al Seminario vescovile"...lo credo bene! Insomma: "E cosa insegna?" "Insegno matematica" "Ah, matematica...ma cosa?" "Geometria" "A cosa serve?!" "Guardi, venga qua, a parte, che non ci senta nessuno: non serve a niente. Però non lo dica, perché io ci piglio uno stipendio, e devo mantenere una famiglia, oltretutto". Allora, questi quattro capi d'azienda, ce n'era uno che però ha avuto la lealtà di dire "No, non abbiamo mai utilizzato quella matematica lì, però è stato un bene per noi averla imparata". Ecco allora che si può fare una riflessione su quelle cose inutili, o meno utili, o utili, che servono, che non servono.

Ricordo di aver detto a una conferenza, proprio in una facoltà di Economia e Commercio: il filosofo Proclo sosteneva che la geometria è inutile, perché anche un somaro sa che la strada più corta fra due punti è la retta: chi vuol fare la strada più corta non fa due lati di un triangolo, ci va direttamente! Sì, è vero: tanto per dire che la stupidità non ha tempo, non ha limiti. Se rimaniamo al puro contenuto delle conoscenze è chiaro che la scienza del geometra è anche la scienza del somaro. Però la differenza è che l'uomo sa il perché, conosce le ragioni, le sistemi le conoscenze. E allora, poiché la conoscenza, diciamo con terminologia di oggi, non è puro accumulo di informazioni ma è strutturazione delle informazioni, è motivazione delle informazioni, è la ricerca delle radici delle conoscenze, allora questo il somaro - beato lui - non lo fa. E questa è ancora una poca consolazione che mi serve, dopo vari secoli, per pensare che un pochino più di un somaro magari il mio lavoro può servire.

Allora ecco, questa chiacchierata...mi dispiace di essermi dilungato così, perché credo di aver risposto almeno in parte a quello che mi è stato detto qui; non voglio alzarmi perché sono pigro, non voglio fare esempi o calcoli perché non ho voglia di farli, e poi, diceva il mio maestro, la matematica è la scienza che insegna a non fare i calcoli. I calcoli son capaci tutti di farli...Non è

proprio vero: mi ricordo una laureanda, poverina, a cui ho dato un esercizio, e aveva un'espressione sotto radice che era lunga una riga; e continuava a ripetere pagine e pagine, e ritrovava questa espressione! Ma dico io, la chiami a, b, c, come le pare, abbiamo tutto un alfabeto, ma andiamo avanti per l'amor del cielo! Perché ovviamente l'enorme maggioranza delle persone crede di saper fare i calcoli e non li sa fare. Però, tornando al discorso precedente, almeno noi vorremmo sapere dove si va a finire, cioè dove ci sta conducendo questo signore che ci insegna tanti bei teoremi, almeno vorremmo sapere il perché, come mai tutti questi discorsi di questi teoremi... Ah, quello che è stato un incubo per me: il teorema di Heine-Pinkerle-Borel-Lebesgue. Che poi dopo, tutto sommato, svaniscono nella testa dei più! Io mi ricordo che quando si facevano i colloqui - roba di 20, 30 anni fa - prima della laurea, c'era il professor Ricci, caro collega, maestro e collega, che faceva sempre due sole domande ai laureandi in matematica, senza ottenere risposta, ovviamente. La prima era la seguente, me le ricorderò sempre: è data una funzione in due variabili nel piano, una funzione onesta - come dicono i francesi: *honnête fonction* - è data una curva del piano, analitica, scritta proprio con le espressioni: cosa vuol dire integrale di quella funzione lungo quella curva? La risposta era regolarmente il silenzio assoluto. L'altra domanda era più cattiva, ma più fondamentale se quella gente avesse capito qualche cosa di tutti i corsi di analisi che gli schiacciavamo in testa: è data una funzione continua in un intervallo chiuso compresi gli estremi, cosa vuol dire che ivi è uniformemente continua? Un'altra di quelle domande a cui non rispondeva nessuno. Cioè - questo è un altro discorso, un pochino più sottile, che dall'esistere di un intorno che per ogni punto fa sì che, fissato un ε positivo arbitrario si possa trovare un δ tale che $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ quando $|x - x_0| < \delta$, questo per ogni punto; ma che ci sia un δ che vale per tutti i punti sotto quelle ipotesi topologiche della continuità in un insieme chiuso, ovviamente nessuno l'aveva capito. L'avevano memorizzato, perché tutti avevano l'esame di analisi passato, l'avevano memorizzato ma non l'avevano capito.

Allora, come mai succedono 'sti fenomeni, come mai certi cervelli sono pieni di teoremi difficili, mentre la matematica, come diceva Peano, è bella perché è semplice? E' bella perché è semplice: io lo dico sempre, ho studiato matematica perché non avevo voglia di studiare! Avessi studiato medicina, ma figuratevi l'anatomia, per esempio, una roba da pazzi! O la chimica, peggio che mai! Tutta quella roba da ricordare...io della matematica ricordo pochissime cose, ma poche, però se devo trovare qualche cosa che dovrebbe essere nella mia testa - magari adesso faccio un bluff perché ormai i miei neuroni sono tutti andati in pensione, ma insomma - un po' di tempo mi date, metto una mano da qualunque parte e tiro e viene fuori una catena e viene fuori tutto quello che voglio. Allora ecco che a un bel momento lo sforzo che si fa per cercare di sintetizzare ti rimane nella testa, nella zucca, non è uno sforzo buttato via; lo sforzo che si fa per darci un perché delle cose rimane poi nella mente dell'uomo razionale - purché sia razionale, beninteso. Quindi ecco perché mi è piaciuto studiare matematica, anche se ho fatto una fatica boia, vi confesso; i primi anni è stata una fatica inumana. Però a un bel momento si intravedeva che qualcosa si poteva semplificare, si poteva in qualche modo compattare, si poteva in qualche modo dominare con poche strutture fondamentali. E quindi anche quei miei sforzi, mal diretti per la verità, per aiutare le matricole, non mi è mai riuscito, mai. Ci riuscivo forse un pochino a Modena perché erano ben pochi, in una città piccola, si conoscevano poi tutti, in qualche modo si aveva un minimo di confidenza; Tant'è vero che poi coloro che andavano a studiare ingegneria a Bologna, perché a Modena avevamo soltanto il biennio propedeutico, poi ritornavano a piangere sulla mia spalla perché si trovavano in mezzo ad aule di 300 persone e dicevano "non possiamo più prendere contatto col professore, non c'è nessuno che ci spiega" Eh, adesso vi rendete conto cosa vuol dire avere il piccolo gruppo, il piccolo numero con cui si lavora parlando, chiarendo, basta a volte una parola per chiarire una situazione; chiarendo, aiutando, magari anche a volte ammonendo se è il caso. Quando sono andato a Pavia già le scolaresche cominciavano a diventare molto più grandi; quando sono venuto poi a Milano, non parliamone. Mi dicevano i miei assistenti che io cercavo di non insegnare le formule, di non insegnare i teoremi: le formule si trovano sui libri, i teoremi si trovano sui libri! Uno, se domina il calcolo algebrico, deve sapere: "Dove vuoi arrivare?" "Lì" "Va

bene, lascia stare, scrivo la formula finale poi ci arrivo io, i calcoli son capace di farli anch'io". Non fa i passaggi di calcolo: ma Dio ti benedica, non son mica qui per fare i passaggi di calcolo! Son qui per insegnarti il perché faccio questi calcoli, son qui per dirti dove voglio arrivare. Beh, i miei assistenti sparsi - erano ragazzi, allora, molto giovani - sparsi in mezzo alle scolaresche, dicevano: "Professore, finché lei scrive delle formule quelli annotano, annotano, annotano disperatamente; quando fa dei discorsi di carattere metodologico mettono giù la matita coll'aria di dire "Beh, speriamo che finisca" Allora, tutta la mia fatica era regolarmente buttata via. Pazienza, non vorrei che fosse buttata via anche questa, quindi perdonatemi il discorso da vecchio brontolone, adesso sto zitto perché voglio sentire le vostre eventuali domande. Non fatene tante, intendiamoci; fatele ad alta voce perché sono diventato vecchio e sordo, quindi se parlate sottovoce non sento. Grazie di tutto, allora; grazie della pazienza, non mi avete lapidato, non mi avete tirato torsoli di mela, non mi avete tirato pasticche di ecstasy! Allora, forza. Devo dire che regolarmente, quando sento qualche conferenza, poi mi capita che le domande intelligenti, che io credo intelligenti, mi vengono in mente quando torno a casa. Vorrei reincontrare il conferenziere ma qui no, lasciamo perdere.

- Volevo sapere..

- Lei vuol sapere, che brava! Mi dica, mi dica.

- ...qual è il ruolo, se secondo lei c'è un ruolo, nello studio, nella conoscenza, nel fare matematica, della fantasia o comunque dell'inventiva?

- Io mi son reso colpevole di varie cose, anche di aver scritto degli articoli sulla creatività. Qui c'è un discorso di Poincaré, su questo fax che mi è arrivato, il quale dice giustamente che per capire un teorema non è che bisogna seguire i ragionamenti uno dopo l'altro: uno deve capire il perché, cosa c'è nella testa. C'è stato un matematico, non mi ricordo più il nome ma voi sapete che uno dei sintomi dell'invecchiamento è la perdita della memoria - c'era quel tizio che diceva: son tre i sintomi dell'invecchiamento, uno è la perdita della memoria, il secondo e il terzo li ho dimenticati - uno dei sintomi dell'invecchiamento è la perdita dei nomi; il quale diceva - me lo sono annotato però da qualche parte - che è ben difficile che uno cerchi di dimostrare una cosa se non è già convinto che sia vera. Cioè a un bel momento ci sono dei fenomeni psicologici strani che - va be', i grandi matematici...Ramanujan aveva la dea Calì che gli dettava le formule giuste; Poincaré li vedeva i numeri, racconta in un certo suo articolo biografico che ha visto il numero soluzione di un certo suo problema mentre saliva su un autobus: a me quando salgo su un autobus mi capita veramente di vedere se il tizio ha la faccia del borseggiatore o no, ma non di vedere un numero che risolve un mio problema - ad ogni modo, qui fa parte della fisionomia del matematico quando è veramente tale. Quindi un certo fiuto, una certa sensazione che non si sa da dove venga; mi ricordo, quante volte mi è capitato di andare dal mio maestro e dire "Guardi, ho dimostrato questo e questo" "Lo sapevo già". Come, lo sapeva già? Viene lì, con la faccia fresca, a dirmi che lo sapeva già! "Ma sì, dev'essere vero perché è così, così e così..." Evidentemente non è che lui avesse fatto un lavoro, avesse fatto la dimostrazione, ma entrava nel suo quadro generale di conoscenze; anzi, nella sua intuizione. E mi dava delle ragioni per cui mi dimostrava veramente che lo sapeva già; cioè, lo sapeva: se si fosse messo lì a dimostrarlo ci sarebbe arrivato. La fatica l'ho fatta io...Mi ricordo una volta che ho scritto un articolo lungo varie pagine su certe proprietà delle singolarità delle curve algebriche piane - che oggi è tutta roba buttata via - e poi ho scoperto, studiando il libro di Alfand, che lui c'era arrivato in mezza pagina. Beh, ho stracciato il lavoro e non se ne parla più, perché quando uno ti sbatte a terra in questo modo non c'è più niente da fare! A volte basta trovare il simbolo giusto, a volte basta ribaltare la questione, non si sa. Certo che questa gente con la fantasia creatrice sono veramente matematici di grande livello, e quando uno vuole in qualche modo cercare di risolvere in modo sensato i problemi, certo che un minimo di fantasia, di voglia di vedere, di

guardare in giro - a volte mi capita di sentirmi come uno di quei mosconi che d'estate devono uscire dalla finestra perché evidentemente non stanno bene in nostra compagnia e sbattono contro i vetri, via delle zuccate, finché a un bel momento trovano il varco giusto e van fuori. Ho letto da qualche parte un matematico di cui vorrei ricordare il nome che dice che a volte capita che quando si arriva a un risultato si ha l'impressione di aver fatto una salita sul fianco di una montagna in mezzo ai rovi, in mezzo alle spine, alle difficoltà; arrampicandosi si arriva in cima con gli abiti sporchi, le mani lesionate, si guarda dall'altra parte e si scopre che c'è una strada comodissima che sale fin sulla cima della montagna. Va be', ma noi abbiamo fatto quell'altra strada! Anche l'aver scoperto che c'è una strada più bella, anche questa è una scoperta; certo, a volte fa venire voglia di imprecare, ma insomma...non sempre è così. Certo che io ho avuto la fortuna, la provvidenza di essere a contatto con matematici creativi, il caso del mio maestro è veramente abbastanza esemplare: lui e Enriques avevano fatto, si parla di singolarità di curve algebriche piane, tutta una serie di costruzione fantastica, di punti-satelliti, di cose - andate a vedere sul secondo volume della *Teoria geometrica delle equazioni algebriche* e ce lo trovate - e loro ci ragionavano sopra, ci ragionavano e ottenevano risultati giusti oltretutto, con queste che ovviamente erano delle costruzioni di pura fantasia! Che però avevano un aggancio con la realtà che loro utilizzavano, sapendo fermarsi al momento in cui c'era pericolo di sbagliare. Perché abbiamo il diritto di dire delle sciocchezze, però dobbiamo fermarci al momento buono per evitare di cadere nel baratro. Così mi ricordo che quando ci insegnava un po' di curve algebriche piane, il teorema di Riemann-Roch, ci diceva (e questi erano ovviamente i risultati di certe sue discussioni con Enriques): i disegni che facciamo sulla lavagna son tutti sbagliati perché la curva algebrica piana è un ente a due dimensioni, bisognerebbe avere la Riemanniana, costruire la Riemanniana; però l'unica cosa giusta è che quando faccio uno scarabocchio sulla lavagna, in ogni punto c'è una tangente unica. E questo dev'essere il riflesso del fatto che, essendo quelle delle funzioni di variabile complessa, o delle funzioni monogene secondo Cauchy o analitiche secondo Weierstrass, come volete, c'è un'unica derivata. Secondo me basta questo per poter stimolare a cercare le risposte giuste a certi problemi. Non lo so, non lo so proprio; ma essendo venuto a contatto con persone creative, molto creative, allora certi meandri dei ragionamenti sono assolutamente o non spiegabili o, se si cerca di spiegarli, diventano banali. Ma effettivamente si ha l'impressione di una invenzione in cui non si sa fino a qual punto giochi l'esperienza, la creatività, la cultura personale, il gusto della ricerca, eccetera. Non lo so, non lo so proprio: questi sono i misteri su cui gli psicologi cercano di dire delle parole che io non ritengo per buone.

Non so se sono risposte soddisfacenti ma non sono qui per dare risposte soddisfacenti.

Coraggio, o abbiamo finito...allora andiamo! Fatevi coraggio, su. Certo, non è una vita facile, quella del matematico, ve lo posso proprio dire; pur essendo una vita da pigro come il sottoscritto, però a volte ci sono dei problemi che si ficcano in testa e che rimangono giorni, e settimane, e mesi; e o fanno scoraggiare, o stancano, o stufano; e poi si ripropongono sotto altre forme...Mi ricordo il professor Finzi, il quale diceva: "Non illudetevi" anzi, non si illudano, perché allora ci davano del lei. A me hanno dato del lei fin dalla prima ginnasio, il professore di matematica di prima ginnasio ci dava del lei. Comunque sia: "Non si illudano: le difficoltà vere rinascono comunque". Uno crede, scegliendo una strada...poi pam! contro quel muro ci sbatte regolarmente. E quindi a un bel momento - questa non so se sia una consolazione oppure no - non c'è da farsi troppe illusioni sulla facilità: non esiste via regia. Il buon Euclide ha detto tante cose giuste e questa è una delle tante cose giuste che ha detto. Non esiste via regia, cioè non esiste una via senza difficoltà in matematica. Se uno non è disposto a stritolarsi un pochino il cervello, allora scelga un'altra strada, faccia il sociologo! Il primo che mi è venuto in mente, insomma...Faccia il venditore di acqua fresca...Non so se vedete alla televisione quelli che ti vendono i numeri al lotto personalizzati: ma come fanno! A parte il fatto che se io avessi i numeri giusti del lotto non vado a venderli ma me li gioco io, come fai a farti prendere sul serio, a dire che ti dà i numeri personalizzati, giusti per te. Un momento: se

dai i numeri giusti a tutti, a un bel momento non possono essere i numeri giusti! Però evidentemente trovano da spendere i soldi - perché quelle trasmissioni lì le pagano loro, io penso; sarebbe anche giusto che le pagasse la RAI per la cultura generale del popolo italiano. Chiedo scusa delle cattiverie che dico, ma insomma, se non mi lasciate sfogare un po' di cattiverie...Ne avrei tante altre da dire, ma non le dico.

Lei chi è di queste tre qui, Elena, Silvia, Fulvia...Posso dire una cattiveria? C'erano anche le tre Parche, che erano Croto, Lachesi e Atropo; no, qui c'è Elena, Silvia, Fulvia. Lei chi è delle tre? Elena? Lei, Elena, non ha niente da dire?

- Rispetto a quello che chiedeva la ragazza: secondo lei, questa creatività in qualche modo si può imparare?

- No. Finisca, finisca la frase!

- Nel senso, per esempio, di imparare una certa duttilità nel trattare i problemi. E un'altra cosa che volevo chiederle riguardo a questo, era se lo scoprire anche storicamente come sono nate certe idee, da dove sono nate certe scoperte, da che problemi sono nate, può aiutare.

- Dunque: rispondo alla seconda domanda. Certo che, a un bel momento, è chiaro che non si può insegnare la scienza storicamente; non posso, ad esempio, insegnare la chimica dando prima la teoria del Flogisto, poi dicendo "no, il Flogisto è tutto sbagliato", non si può. Però un certo richiamo al problema concreto da cui le cose nascono mi pare che sia molto utile. Questo perché l'utente, il cliente, non abbia l'impressione che cadano dal cielo, che tutte queste cose qua siano dovute alla fantasia deformata o alla psiche patologica di quella gente che vengono chiamati matematici. L'enorme maggioranza sono problemi nati da una realtà concreta, da una curiosità, da un gusto di penetrare nelle cose, questo sì; quindi in un certo senso il richiamo a una realtà storica o a un'evoluzione storica mi pare che possa essere utile. Questo per evitare quello che l'amico Melzi che ho nominato, il compianto amico Melzi, chiamava la divaricazione fra il simbolo e il significato, che è uno dei guai della scuola. Uno a un bel momento, o perché non capisce, o perché le ritiene cose inutili, o perché si stufa, impara a memoria e buonanotte. E questa è la divaricazione fra il simbolo e il significato, che è veramente il fallimento dell'uomo razionale. Ricordo quando lavoravo con le maestre, un fatto estremamente interessante: c'era una maestra che raccontava di una ragazzina che doveva rispondere alle domande di una scheda. Nella scheda c'era una figurina con una pianta e due case: indicate qual è la casa a destra della pianta. E la ragazzina non sapeva quale fosse; e il fratellino, di qualche anno più vecchio, diceva: "Ma no, è una domanda mal posta: se metti così quella a destra è quella lì, se giri di dietro quella a destra è l'altra casa, che razza di domanda è!" Come quando ci mettono la fotografia di quei musici che compaiono sui giornali: il personaggio a destra è il pinco pallino. Io non l'ho mai visto...a destra di chi?! Quando dicono a destra di chi guarda, siamo d'accordo; ma a destra: chi sta a destra? Risposta della ragazzina: "No, devo trovare una risposta perché sennò la maestra si arrabbia". Ecco: questo è il fallimento dell'uomo razionale, cioè invece di andare a dire "No, guardi, la domanda è mal posta, mi deve dare qualche informazione in più, mi deve dire dove devo pormi per giudicare della destra e la sinistra"...Come tanti - non uno solo, tanti - libri di scuola elementare, sussidiari di scuola elementare, nel capitolo di geometria mettevano: due righe messe così, rette convergenti; due righe messe così, rette divergenti. Col risultato che, se il ragazzino del banco davanti si volta e guarda il libro del ragazzino del banco di dietro, "queste sono le convergenti" "ma no, son le divergenti!".

Non dico che siano sbagliate, ma bisogna che tu mi dia le informazioni precise perché io possa, in base a certe convenzioni, stabilire la risposta giusta. Ma ne ho trovate diverse, mica una sola! Ci

sono quelle che erano convergenti verso l'alto, quelle che erano convergenti verso destra...c'era, diciamo, una suddivisione in specie, ma il genere era questo qui.

Allora, ritornando al discorso della divaricazione fra il simbolo e il significato, io ritengo che un minimo di giustificazione, magari fatta con una brevissima analisi storica: come è nato questo problema? La meccanica è il paradiso delle matematiche, diceva Leonardo da Vinci, perché ovviamente, con la sua mente intuitiva, dai problemi concreti uscivano poi le strutture o i problemi astratti che lui faceva risolvere a Luca Pacioli perché lui sbagliava i calcoli.

Per quanto riguarda poi il discorso della creatività, non si può insegnare, a mio modesto parere. Certo, si può cercare di allenarla, di praticarla, come dire, di raffinarla; e a questo serve molto la pazienza - veramente, ci vuole pazienza e fatica - di scrivere le procedure che uno segue per risolvere un problema, anche il problema più beota, anche il problema più stupido, quello della Susi della Settimana Enigmistica: come sono arrivato? Metto giù un diario e vedo come sono andate le idee nella mia testa, come mai si sono fatte così. Allora a un bel momento uno tende a riflettere sulle proprie procedure mentali, che non è detto che siano uguali a quelle degli altri. Ricordo che, tempo fa, ho tamponato i colleghi per un problema che mi era sottoposto da un mio nipote perché gli era stato posto dal professore di matematica. E dicevo: non dirmi la soluzione, la so. Dimmi come ci sei arrivato, perché mi interessa vedere le procedure mentali che ti portano alla formula risolutiva. E' questa la cosa veramente più interessante, questa mi sembra che sia un allenamento, un tentativo di allenare non soltanto la propria capacità di analisi e di critica, ma anche la propria, come dire, inventiva. Ecco, ho letto da qualche parte che l'intelligenza è la capacità di trovare le analogie tra cose che ci appaiono diverse, e di trovare le diversità tra cose che ci appaiono uguali. Questa mi pare una bella frase; non una definizione di intelligenza, ma è l'analisi e la sintesi, in sostanza. Cioè la capacità di andare a vedere le diversità di cose che ci appaiono esteriormente uguali, oppure di andare a vedere le analogie, a un livello superiore ovviamente, delle cose che ci appaiono diverse. Questo mi pare che sia anche un esercizio che è fastidioso, noioso, faticoso, ma che io ho trovato molto utile per analizzare anche le mie procedure mentali; così come ho trovato utile, imprecando, imparare a programmare. Oddio, ci riescono gli informatici a comandare i computer, non devo riuscirci io! A parte il fatto che ogni volta che andavo da un collega per trovare una conferma numerica di un mio risultato - perché io mi ricordavo sempre le parole che diceva il mio maestro, ogni volta che trovava qualche cosa diceva "Non mi fido, non mi fido", era un ipercritico anche di se stesso - prima di riuscire ad avere una conferma, santo cielo! Allora ho dovuto imparare il programma più cretino, che è il BASIC, con una fatica da matti perché i manuali sono assolutamente illeggibili, non trovi mai quello che vorresti avere, non capisci dove hai sbagliato, devi avere un amico che ti aiuta e che ti dice che invece di metterci un punto ci hai messo un punto e virgola, invece di metterci un punto e virgola ci hai messo un due punti...Ma come, ma 'sto scemo non capisce niente! Gliel'ho detto tutto! Non, non gliel'hai detto bene. Però, adesso, ritornando a quella fatica boia - che se avessi avuto un minimo di pazienza non avrei fatto quella fatica - forse la fatica mi è servita, perché a un bel momento ho dovuto chiarire a me stesso certe procedure mentali che invece davo per scontate. La macchina, essendo cretina, gli elettroni, essendo, come diceva l'amico Melzi, il servo più veloce e più stupido che noi abbiamo, bisogna che tu gli dica tutto. Allora è certo che tu devi prendere coscienza di certe procedure mentali che, quando risolvi con la matita e carta, ti vanno così automatiche, diciamo intuitive, immediate, e invece devono essere precisamente riconosciute perché il riconoscerle ti può salvare da certi errori; o ti può servire per dare gli ordini giusti alla macchina. Allora ecco che il riandare ai propri errori - c'è un bellissimo articolo (Lucchini lo sa), un bellissimo articolo di Enriques che egli scrisse sul periodico di matematica, sull'errore nelle matematiche. Enriques era un intuitivo tipico, che quando le cose le vedeva, poi fargliele dimostrare figurati! E poi erano giuste! Articolo che lui scrisse quando gli era proibito dalle leggi razziali di firmare gli articoli; e difatti scrisse firmandolo Adriano Giovannini, che erano i nomi dei due figli, una era l'Adriana e l'altro Giovanni, e lui firmò con uno pseudonimo. E quest'articolo sull'errore nelle matematiche è veramente molto interessante, perché dimostra

quanto sia fecondo l'errore quando però sia rimeditato, conosciuto, corretto ovviamente nei debiti modi, si capisce. Quali siano le strade, e quale sia anche il partito da trarre dall'errore...C'è una tesi classica del filosofo Benedetto Croce - voi non l'avete neanche sentito nominare - sulla a-teoreticità dell'errore, che è una tesi abbastanza interessante: dice che l'errore mentale, l'errore teoretico, è dovuto non mai al ragionamento, è dovuto a stimoli economici, o a pigrizia, o incapacità, o desiderio di arrivare presto alla conclusione...discorsi molto profondi.

Allora, questo riflettere, e se possibile anche scrivere, sulle proprie procedure mentali, oltre ad aiutare a correggere gli errori (quando si ha voglia di non farli, beninteso), serve anche a chiarire a se stessi, ad allenare e ad affinare quella che potrebbe esser chiamata una creatività o una intuizione. Ma queste sono cose che non si insegnano: si imparano soltanto con la pratica, e una pratica che non è facile, una pratica che richiede fatica, pazienza, applicazione e perseveranza. Anche quando si ha l'impressione, si dice "Ma dove vuole andare a finire 'sto tizio, con tutti questi ϵ , con tutta questa roba..." C'è Freudenthal, in un suo libro, che dice: "Il matematico non legge mai le dimostrazioni degli altri: vede un teorema, legge qual è l'enunciato e poi si arrangia a cercare di dimostrarlo per conto suo". Il mio maestro era così, qualche volta per provarmi mi dava uno di quegli estratti che riceveva e che lui non leggeva, o se leggeva era per caso, e diceva: leggi qui, guarda, c'è del giusto e del nuovo: il nuovo non è giusto e il giusto non è nuovo, però va a cercare dove è sbagliato il ragionamento. Lui l'aveva trovato subito, perché aveva letto la prima e l'ultima pagina, l'enunciato del teorema finale, e aveva trovato un controesempio, e quindi aveva dimostrato che il teorema era sbagliato perché non funzionava: se uno mi fa un teorema per un n qualunque e poi lo metto per $n=2$, cioè nel piano, dove lo vedi, e non funziona, vuol dire che c'è qualcosa che non torna. Però per n va benissimo...

Anche qui, dipende dalla fisionomia intellettuale delle persone.

Allora basta, facciamo gli auguri per Natale?