

Matematica dinamica e a colori. Proiezioni e sezioni di ipercubi. T-equiscomponibilità in un infinito continuo di modi fra dodecaedri rombici, cubi allungati e cubi compressi. B-splines. Fusionismo, analogia, induzione e immagini mentali.

Mario Barra

Riassunto Dodecaedri rombici come proiezioni di ipercubi. *Cubi compressi*, Cc^3 , *cubi allungati*, Ca^3 e *tassellazioni pulsanti*, tassellazioni sovrapposte, e loro intersezioni, tetraedri e ottaedri tassellanti, cristalli. Un sistema di coordinate definito a meno di una costante additiva. Sezioni di cubi e di ipercubi ottenute attraverso gli ipertetraedri e le differenze finite. Probabilità. Equiscomponibilità nello spazio per traslazioni (*T-equiscomponibilità*) e in una infinità continua di modi. *B-spline* con qualche proprietà. Molte dimostrazioni di teoremi semplici. Importanza di: *fusionismo*, analogia e induzione, *immagini mentali*, colori e aspetti dinamici. Riproposizione degli stessi argomenti indirizzata ad una dimensione qualsiasi.

Abstract Rhombic dodecahedrons as projections of hypercubes. Compressed cubes, Cc^3 , lengthened cubes, Ca^3 , and pulsant tessellations, overlapped tessellations, and their intersections, tetrahedrons, octahedrons, crystals. A new coordinate system that does not change adding a additive constant. Sections of cubes and hypercubes obtained through tetrahedrons and finite differences. Probability. Equiscomponibility in space through translations and a continuous infinity of ways. *B-spline* with certain properties. Importance of: *fusionism*, analogy and induction, *mental imageries*, colors and dynamic aspects. Various proofs of simple theorems. Reproposal of the same arguments addressed to any dimension.

Mario Barra Dip. Mat. Fac, Scienze Università Sapienza Roma barra@mat.uniroma1.it

C'è un alieno in mezzo a noi

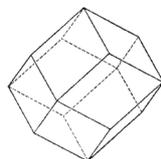


Fig. 1. Una proiezione di un ipercubo nel nostro spazio

In figura è rappresentato un **dodecaedro rombico**, Dor^3 .

In quanto segue indico le premesse per dimostrare molto semplicemente che Dor^3 è la proiezione nel nostro spazio, R^3 , di un cubo quadrimensionale, C^4 . La dimostrazione verrà data nel prossimo numero di *Alice* perché preferisco lasciare al lettore la possibilità di farlo personalmente.

In questo e nel prossimo articolo ci sarà molto di più. Parlerò anche dei Dor^{d-1} , cioè di una proiezione nel nostro spazio di cubi in dimensione d qualsiasi, C^d , e di nuovi poliedri collegati agli ipercubi. Presenterò ad esempio i *cubi compressi*, Cc^3 , i *cubi allungati*, Ca^3 e le *tassellazioni pulsanti*, $\mathbb{T}\sigma^3(s)$, assieme alle loro generalizzazioni Cc^d , Ca^d e $\mathbb{T}\sigma^d(s)$.

Presenterò anche un nuovo solido che tassella lo spazio che è concavo, ha facce uguali e non regolari ed ha simmetria sferica, la cui determinazione attraverso le sue proprietà è stata proposta ai lettori di *Progetto Alice* attraverso un quesito pubblicato esattamente 10 anni fa, in un articolo del n. 3 del 2001, che ha ricevuto soltanto delle risposte parziali.

Dal punto di vista matematico verranno dimostrate alcune proprietà in parte originali almeno nella loro interpretazione geometrica e nella loro possibilità di collegare sia settori diversi della matematica, sia il *mondo continuo* con il *mondo discreto*. Ed è proprio *nel discreto* che in modo veramente semplice, cercando delle regolarità numeriche, ho scoperto molte proprietà che, interpretate nel continuo, hanno facilitato la comprensione, la generalizzazione, la dimostrazione e il collegamento fra molti argomenti. Così ad esempio la *tassellazione pulsante* del piano $\sigma(s) = x_1 + x_2 + x_3 = s$, è la sezione con $\sigma(s)$, variabile con s , dello spazio tassellato con cubi unitari, C^3 , con spigoli paralleli agli assi, e la funzione che esprime la misura del *modulo pulsante* di tale tassellazione, diviene la densità della somma di tre numeri aleatori uniformi stocasticamente indipendenti e contemporaneamente una funzione *B-spline*.¹ Traslando attra-

¹ In analisi matematica, una spline è una funzione, costituita da un insieme di polinomi raccordati tra loro, il cui scopo è interpolare in un intervallo un insieme di punti (detti *nodi* della spli-

verso i numeri interi questa funzione B-spline di secondo grado e moltiplicando tali funzioni traslate per i *numeri triangolari* rispettivamente di dimensione 0, 1, 2,² e sommando questi prodotti si ottiene una costante, una retta e una parabola. La dimostrazione è immediata: è costante, lineare o parabolica l'area delle sezioni secondo $\sigma(s)$ rispettivamente di cubi allineati, di cubi che tassellano il quadrante positivo del piano e l'ottante positivo della spazio.

Si ottengono così i tre elementi di una base per ottenere ogni polinomio di secondo grado. La generalizzazione in dimensione d qualsiasi, nei termini sia delle misure delle sezioni di un ipercubo C^d , che peraltro sui vertici sono proporzionali ai numeri di Eulero, sia delle misure di un *modulo pulsante*, sia della densità della somma di d numeri aleatori uniformi, sia di una B-splines e della possibilità di ottenere da questa e dalle sue traslazioni una base dello spazio vettoriale dei polinomi di grado $d-1$, è semplice e sintetica, e l'interpretazione geometrica che traduce tutte le proprietà nei termini di tetraedri e di tetraedri tronchi, permette abbastanza facilmente di “vedere” e dimostrare molte proprietà che solitamente vengono presentate e dimostrate in modo più astratto e complicato.

Sembrano originali anche le dimostrazioni geometriche “uguali” a quelle prodotte nel continuo, anche se adattate al mondo discreto, che permettono di passare dalle densità alle distribuzioni di probabilità della somma di d *dadi generalizzati* (f valori consecutivi sulle facce) e di comprendere, come già in Galilei, l'essenza della *Legge dei grandi numeri* e del *Teorema del limite centrale*.

Dal punto di vista sia matematico, sia didattico, e sempre in collegamento con quanto precede, verrà presentata una breve storia del problema della *equiscomponibilità* nel piano e nello spazio e verrà dimostrata una condizione sufficiente per ottenere tale equiscomponibilità collegandola alle tassellazioni di R^2 e di R^3 ed indicando le premesse per una loro generalizzazione. In particolare verrà provata direttamente l'equiscomponibilità dei Dor^h con i Ca^h e vari Cc^h , per $h=2$ e per $h=3$, e in quest'ultimo caso anche con altri poliedri. Queste proprietà potrebbero essere significative considerando che Ugo Amaldi auspicava l'individuazione di nuovi esempi di equiscomponibilità nello spazio oltre all'unico caso noto (a meno di particolari

ne), in modo da essere continua (almeno fino ad un dato ordine di derivate) in ogni punto dell'intervallo. La funzione interpolante ottenuta con le spline è più *liscia* di quelle ottenute con altri metodi (ad esempio con l'interpolazione polinomiale), nel senso che è la funzione interpolante con *curvatura media minima*. Una spline è una combinazione lineare di B-spline.

² I *numeri triangolari* di dimensione 0, 1, 2, sono rispettivamente i numeri 1,1,1,...,1,... , 1,2,3,..., h, ... , e 1,3,6,..., $h(h+1)/2$, ...

affinità) di un particolare tetraedro (vedi *tetraedri fattoriali*, *Progetto Alice* N. 32, pp. 311-338) equiscomponibile con un prisma con la stessa base.

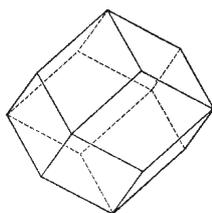
L'insieme di questi argomenti mostrano un esempio di *fusionismo* e si collegano strettamente sia a varie considerazioni didattiche espresse da grandi matematici e pedagogisti, sia agli esempi che verranno presentati.

** è "cattiva" filosofia quella che sommerge fatti e idee in nuvole di parole e superfetazioni irrilevanti; è "buona filosofia" quella che cerca di eliminare tutto ciò che di troppo e di illusorio viene già aggiunto dal linguaggio comune per ridursi al minimo veramente essenziale ... l'esigenza cui deve rispondere è di semplificare, di chiarire, non di gravare il discorso di significati astrusi ... le considerazioni "filosofiche" sono intese non ad aggiungere sovrastrutture e fronzoli bensì (come ritengo utile) a scarnificare di quanto rimane di troppo anche nelle concezioni scientifiche.*

de Finetti B., 1967, *Atti della tavola rotonda tenuta a Poppi*, 11-12 Giugno 1966, Scuola di Statistica dell'Università, Firenze, pp. 146 e 203- 204.

** Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere "belle", le idee, come i colori e le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale ... E' senza dubbio molto difficile "definire" la bellezza matematica, ma questo è altrettanto vero per qualsiasi genere di bellezza. Possiamo anche non sapere che cosa intendiamo per "bella poesia", ma questo non ci impedisce di riconoscerne una quando la leggiamo.*

Godfrey H. Hardy, 1989, *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano, p. 67.



Le parole di Hardy: “*le idee, come i colori e le parole, devono legarsi armoniosamente*” mi ricordano il mio grande desiderio di una rivista di didattica della matematica a colori! Anzi, di più, mi piacerebbe una rivista con allegato un CD nel quale presentare i disegni in modo dinamico, e offrire anche la possibilità di corredare un argomento con immagini “belle e interessanti” relative ad esempio alle applicazioni della matematica.

Queste considerazioni le ho già espresse in molti articoli, corredandoli con numerosi esempi, e in particolare parlando del Dor³, cioè dell'*alieno*, cercherò di mostrare come la presenza del colore e degli aspetti dinamici può essere didatticamente di grande aiuto.

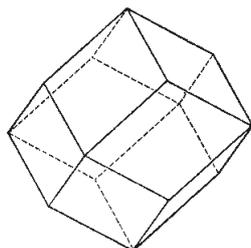
Non si tratta soltanto della possibilità di richiamare l'attenzione sul pentagono STWJZ esprimendosi nei termini del *pentagono rosso*; più in generale si può tener conto del fatto che il linguaggio sta cambiando, che si può ragionare a partire da espressioni più simili a quelle usuali rispetto a quelle matematiche e che è possibile considerare alcuni aspetti estetici importanti.

Stiamo ripercorrendo le idee già espresse quasi quaranta anni fa Bruno de Finetti e da George Polya.

Bruno de Finetti e George Polya

Alla proiezione del film di Polya *How to solve it*, del 1973, (diapositive mosse da un pupazzo (Giorgietto = George Polya) in mano a de Finetti; formule mostrate facendo finta che fosse il pupazzo a spostarle, ...) de Finetti (1973) così commenta le modifiche portate su propria richiesta:

*Di nuovo c'è l'uso dei colori: in ROSSO sono indicati i DATI (e poi, man mano, le cose che divengono note in funzione dei dati); in VERDE le INCOGNITE (ciò che si cerca, e le grandezze ausiliarie via via introdotte finché non sono state espresse mediante i dati). Il procedere del ragionamento consiste visivamente in collegamenti fra punti, che, man mano, da verdi divengono rossi... Polya accettò volentieri la diversa utilizzazione dei colori... Un perfezionamento possibile, se uno schema con le convenzioni suddette si facesse in **animazione**, consisterebbe nel far avvenire le variazioni con **continuità** ...".*



Visto che ho iniziato a parlare del mio desiderio del colore e della animazione, che ho ereditato da de Finetti e da Polya, parlerò anche del mio rapporto con il nostro *alieno*.

Il dodecaedro rombico fa parte della storia del mio interessamento per la didattica.

Nelle 13 Esposizioni di Matematica di Emma Castelnuovo, cui ho collaborato, sette in Italia e sei all'estero, io presentavo in particolare un argomento considerato da molti affascinante: *percorsi minimi, api, bolle di sapone*, nel quale dimostravo con le carrucole e con le bolle di sapone che attraverso l'esagono, che in questo articolo verrà presentato come dodecaedro rombico in due dimensioni, e con tre rombi del tetraedro rombico presenti in fondo ad ogni celletta di un'arnia, le api possono contenere la massima quantità di miele utilizzando la minima quantità di cera.

La storia inizia nel 1712 quando l'astronomo Giacomo Maraldi misurò l'angolo ottuso presente nei tre rombi di una celletta di api e trovò la misura di $109^{\circ}28'$. Réaumur, ritenendo che tale forma corrispondesse a un criterio di economia, propose il seguente quesito a Koenig:

Fra tutte le cellule esagonali a fondo, composte di tre rombi uguali, determinare quella che può essere costruita con il minimo di materia.

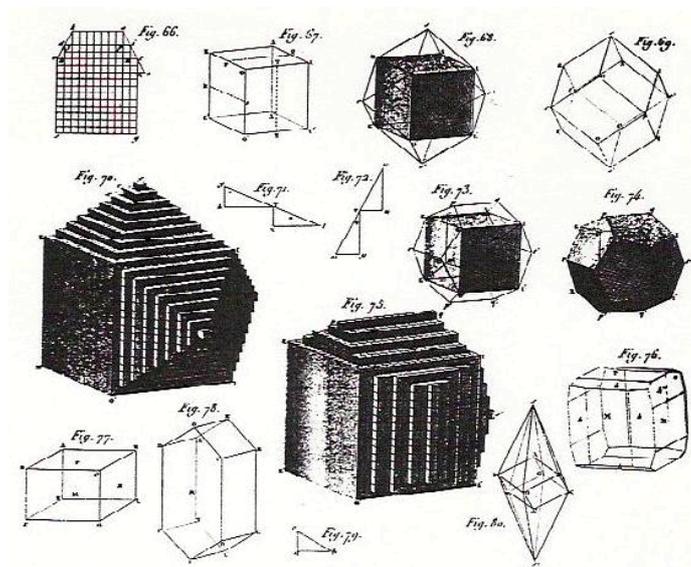
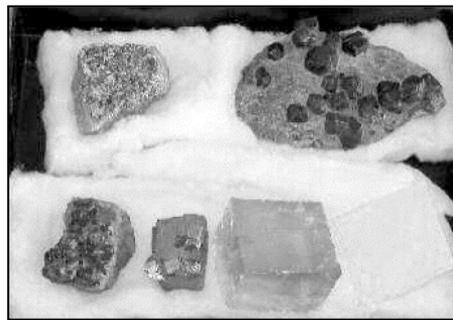
Koenig, nel 1739, mediante il calcolo differenziale, trovò che gli angoli della cella di minima superficie erano di $109^{\circ}26'$. Ma sbagliò i calcoli. Mac Laurin nel 1743 confermò i valori di Maraldi, e l'angolo di $109^{\circ}28'$ viene chiamato da alcuni l'angolo di Maraldi.

Gli angoli rimangono uguali a quelli dei dodecaedri di cui abbiamo parlato volendo minimizzare il numero di chilometri di strade per collegare un ospedale con tre città e, sotto altre condizioni, per collegare un punto con quattro punti nello spazio.

Questi argomenti li ho presentati sia in varie scuole e convegni, e in particolare in una plenaria alla *XXXIV Rencontre Internazionale della CIEAEM* tenutasi a Orleans nel 1982, [8] [9] [10], sia in televisione nella trasmissione *Orizzonti della scienza e della tecnica*, curata da Giulio Macchi, e in uno dei cartoni animati con i quali ho fatto trasmettere ogni settimana sul secondo canale TV, durante il periodo scolastico e per tre anni, molti quiz matematici illustrati dal famoso disegnatore Gibba che in Italia ha curato i cartoni della *Pantera rosa*. Ultimamente l'argomento ha fatto parte di una sperimentazione, ripetuta in due anni, con gli studenti di due licei, assieme alla determinazione in più modi dei tredici poliedri archimedei attraverso tre trasformazioni che agiscono sui cinque poliedri platonici, [19] [20] [21].

Può essere interessante sapere sia che i solidi regolari, detti *platonici*, siano soltanto cinque, sia che da essi derivino quelli *archimedei*, sia che alcune proprietà possano essere scoperte dagli studenti e che le dimostrazioni siano molto semplici, sia infine constatare la presenza delle forme di questi poliedri in numerosi cristalli, mostrando un mirabile collegamento fra la natura e le astrazioni.

Personalmente ho dei cristalli bellissimi che ad esempio riproducono perfettamente la forma del dodecaedro rombico.



In un antico disegno viene tradotta graficamente una ipotesi sulla formazione dei cristalli di granato, che hanno la forma di un dodecaedro rombico. La stessa forma si ritrova in numerosi altri cristalli: la *sfalerite*, la *magnetite*, il *piropo*, l'*almandino*, la *grossularia*, l'*andradite*, ..., che spesso ho potuto vedere purtroppo soltanto nei libri. Altri cristalli hanno la forma di ottaedro o tetraedro che ugualmente si ottengono come sezioni dei cubi C^4 .

Ho parlato di poliedri e di iperpoliedri al quinto anno del corso di laurea in matematica dell'Università di Roma Sapienza. Quasi nessuno andava oltre la conoscenza del cubo e del tetraedro e molti pensavano, come Aristotele, che il tetraedro regolare tassella lo spazio.

Peccato, credo che almeno dal punto di vista pedagogico, il "saper vedere"³ sia più importante del teorema di Pitagora.

* *Sir D'Arcy W. Thomson*⁴ once remarked to me that Euclid never dreamed of writing *An Elementary Geometry*: what Euclid really did was to write a very excellent (but somewhat long-winded) account of the Five Regular Solids for the use of Initiates. However, this idea, first propounded by Proclus, is denied by Heath.

Coxeter, H.S.M., 1963 (1948), *Regular Polytopes*, The Macmillan Company, p.13.

* Egli [il padre di Fichera] preferiva insegnarmi passeggiando ... Il suo insegnamento, anche di questioni matematiche, specie di geometria, avveniva senza che né lui che io avessimo un foglio di carta ove scrivere. Egli voleva che io immaginassi da me le configurazioni geometriche, a volte anche assai complicate, di cui egli veniva a parlarmi. Ciò perché io sviluppassi al massimo la mia intuizione geometrica. E voleva che io cogliessi la bellezza dei risultati che egli mi esponeva, assicurandosi così che io avessi compreso appieno il significato. Non si spazientiva mai, quando io non riuscivo a seguirlo, ed, instancabilmente, elaborava schemi più semplici che potessero, senza affaticare molto la mia giovane mente, portarmi alla conquista del risultato."

Gaetano Fichera, *Alcuni ricordi* (Lettura registrata alla Discoteca di Stato il 22, maggio, 1972).

³ Dal titolo di un libro molto bello: Bruno de Finetti, 1987 (1967), *Il saper vedere in matematica*, Loescher.

⁴ Autore di un libro pieno di fascino e poesia: *D'Arcy Thomson W.*, 1969 (1961), *Crescita e forma*, Boringhieri.

C³[1]

Definizione: C³[1] = {x=(x₁, x₂, x₃): 0 ≤ x_h ≤ 1, h=1,2,3}.

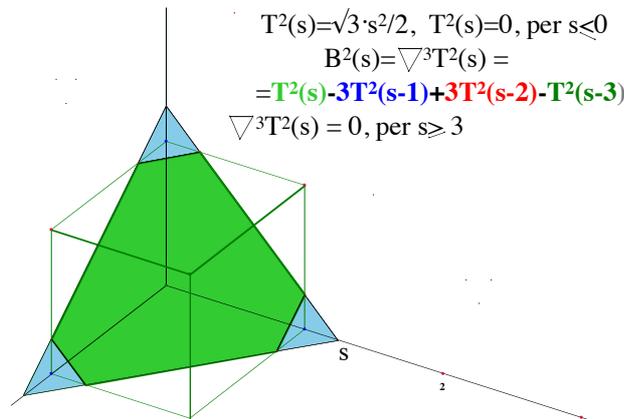
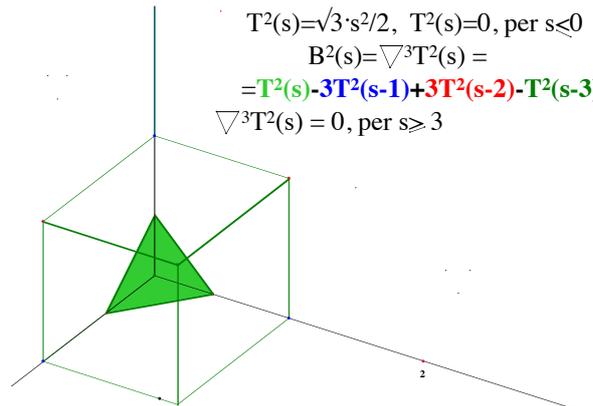
Vertici di C³[1] e loro colore

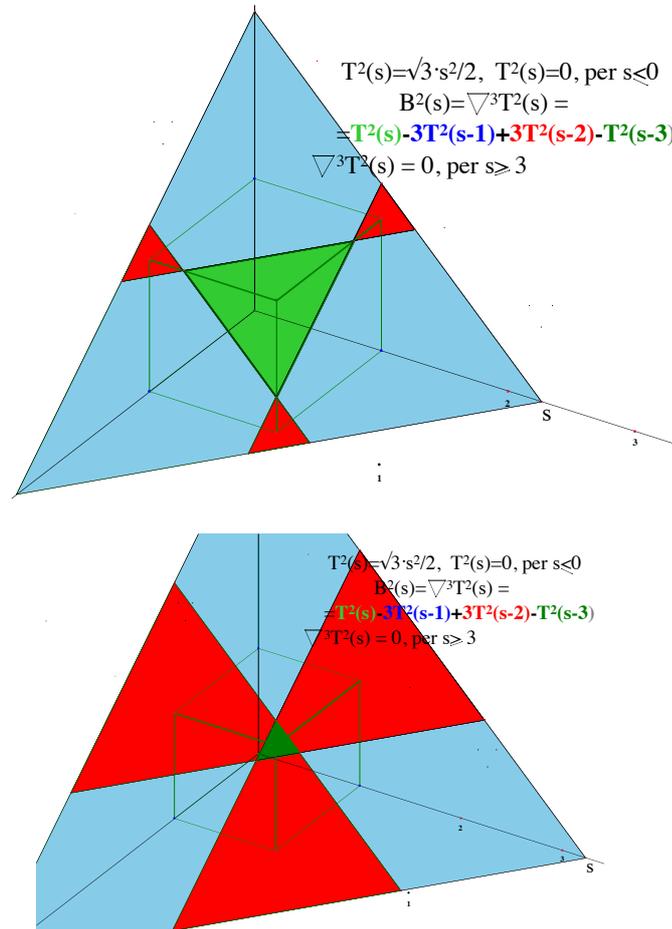
C³[1] è intersecato da $\sigma^2(\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^3 x_j = h, h=0,1,2,3$ nei seguenti *vertici colorati* V(h):

un V(0)=O=(0,0,0), tre V(1), tre V(2), un V(3)=U=(1,1,1),

ove il loro numero è individuato dagli *anagrammi* delle coordinate dei vertici che sono uguali a zero o ad uno. Tutti i vertici di C³[1] sono del tipo V₃ perché da ogni vertice escono 3 spigoli.

Sezioni di C³[1]: C³(1;s) è la sezione di C³[1] con $\sigma^2(\mathbf{s})$

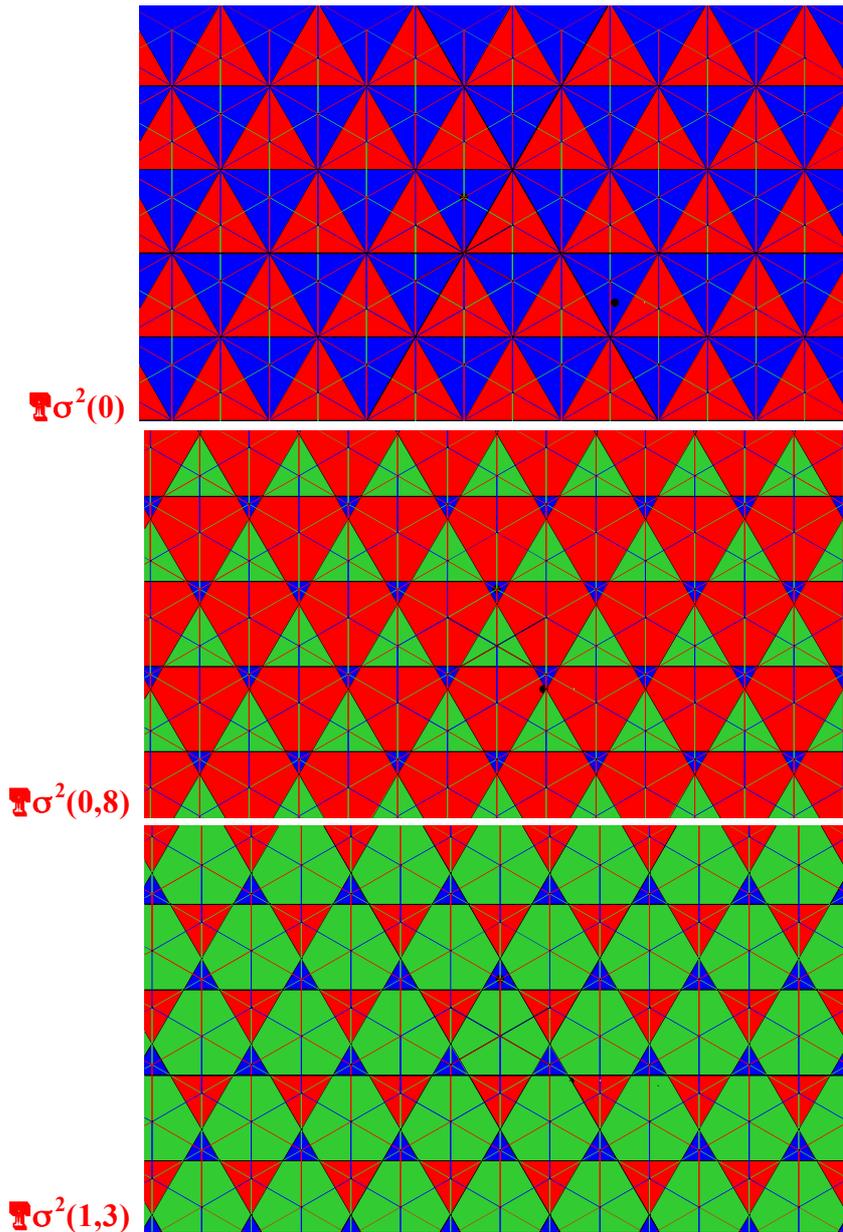


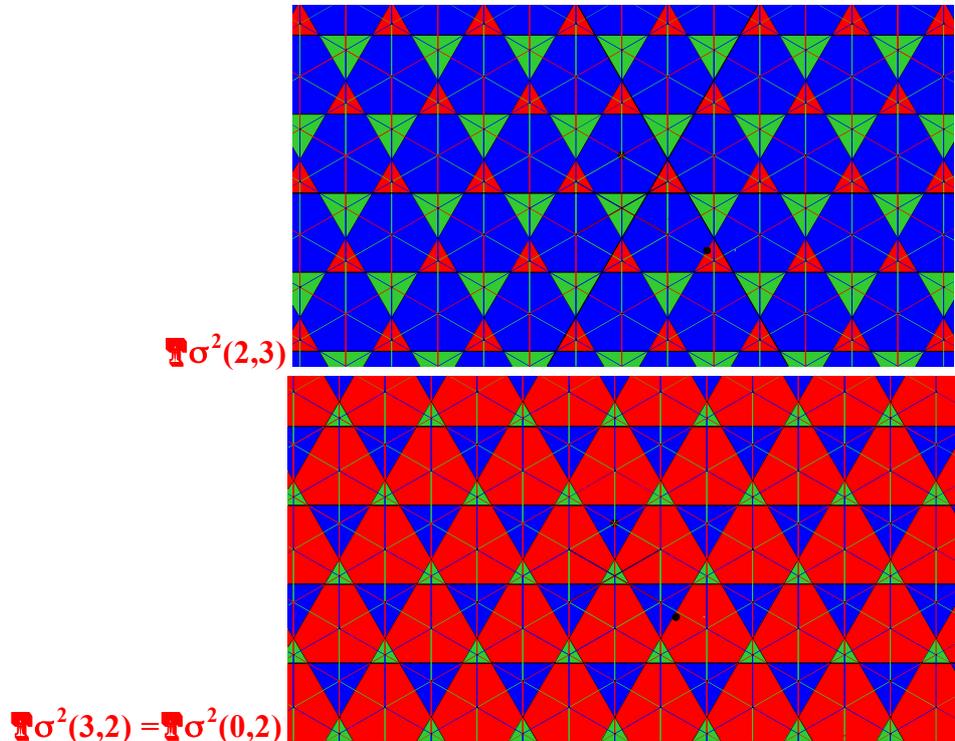


Tassellazione con i $C^3[1]$. Loro sezioni, simboli e colori

La tassellazione, $\mathfrak{T}C^3$, di R^3 con gli ipercubi si ottiene traslando $C^3[1]$ in tutti i modi secondo vettori con coordinate intere positive, negative o nulle, ottenendo tutti i $C^3[1]'$ che hanno i vertici con coordinate intere. I $C^3[1]'$ di $\mathfrak{T}C^3$ vengono colorati in **rosso**, **verde** e **blu** ed indicati rispettivamente con $_{-1}C^3$, $_0C^3$, $_1C^3$ a seconda che il loro corrispondente per traslazione del vertice O di $C^3[1]$ (o, che è lo stesso, del corrispondente del vertice U), che viene detto *origine O'* di $C^3[1]'$, abbia somma delle coordinate: $3k-1$, $3k$, $3k+1$, k intero positivo, negativo o nullo.

Così i vertici: **un** $V(0)=O=(0,0,0)$, **tre** $V(1)$, **tre** $V(2)$, **un** $V(3)=U=(1,1,1)$, di $C^3[1]$, sono nell'ordine le *origini* di **un** ${}_0C^3=C^3[1]$, **tre** ${}_1C^3$, **tre** ${}_{-1}C^3$ e un ${}_0C^3$.
 - $\sigma^2(s) \cap \mathbb{T}C^3$, al variare di s , dà origine ad una *tassellazione pulsante*, $\mathbb{T}\sigma^2(s)$, del piano $\sigma^2(s)$ che ripete ciclicamente le tassellazioni ottenute per $0 \leq s \leq 3$.





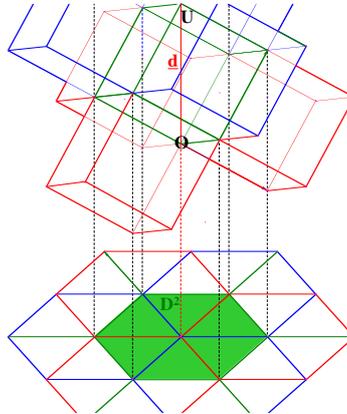
Spigoli e nuova definizione di $C^3[1]$

Sugli assi coordinati x_h ci sono i tre spigoli di $C^3[1]$ che vanno da O ai $V(1)$. Su questi spigoli vengono sovrapposti tre vettori unitari u_h che **escono** dal punto $O=(0,0,0)$, che prendono il nome di vettori **generatori**. In questo modo $C^3[1]$ e i suoi spigoli sono individuabili anche dalle $3!$ **passegiate** da O ad U determinabili dagli **anagrammi** di $u_1u_2u_3$.

$C^3[1]$ è la proiezione di $C^3[1]$ che dà origine ad un dodecaedro rombico Dor^2

Proiettando $C^3[1]$ nella direzione di $d=OU$, su un piano $\sigma^2(c) = \sum_{j=1}^3 x_j = c$

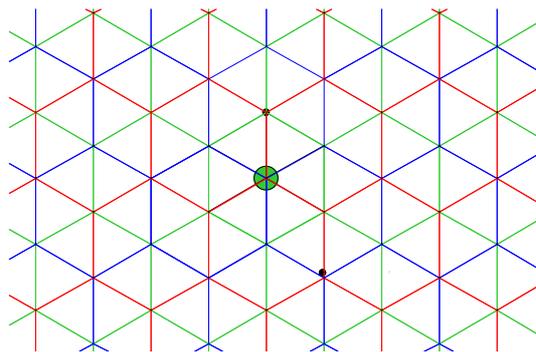
(perpendicolare a d), si individua $Dor^2 = C^3[1]$ che, quindi, è costruibile con le $3!$ **passegiate** ottenute con le permutazioni delle **proiezioni** u_k degli u_k . La misura degli u_k e gli angoli fra ogni coppia di questi si possono individuare anche attraverso i segmenti, detti **raggi**, che uniscono il centro di un triangolo equilatero, $T^2[\sqrt{2}] = T^2(1)$, con i vertici.



- Dor^2 viene indicato anche con D^2 .
- Poiché la proiezione non varia al variare di c , il piano $\underline{\sigma^2(c)}$ verrà indicato anche con $\underline{\sigma^2}$.
- Le **sottolineature** possono essere omesse (vogliono unicamente ricordare che si tratta di una *proiezione*).

Proiettando i cubi dei tre colori $_{-1}\text{C}^3$, $_0\text{C}^3$, $_1\text{C}^3$ si ottengono i dodecaedri rombici D^2 dei tre colori corrispondenti $_{-1}\text{D}^2$, $_0\text{D}^2$, $_1\text{D}^2$ e *proiettando* la tassellazione TC^3 sullo spazio $\underline{\sigma^2(c)}$, si ottengono tre tipi di *tassellazioni* sovrapposte che egualmente mantengono i colori: **rossi**, **verdi**, **blu**:

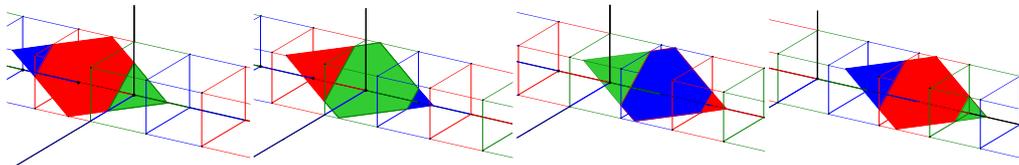
$$_{-1}\text{T}\text{D}^2, _0\text{T}\text{D}^2, _1\text{T}\text{D}^2.$$



Su ogni D^2 di un colore si sovrappongono 3 volte $1/3$ di ciascuno dei D^2 degli altri due colori: basta guardare alle facce di $_0\text{C}^3$ in comune con $_1\text{C}^3$ e $_{-1}\text{C}^3$.

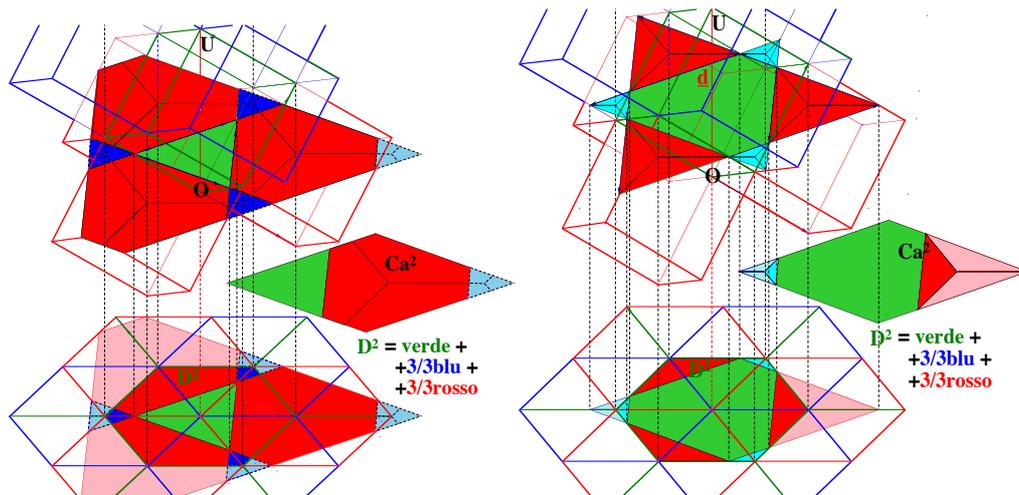
- Un **profilato** di $C^3[1]$ indica l'**unione** infinita di cubi $C^3[1]$ **allineati**. Si indica con $U_a C^3[1]$. Ad esempio $U_a C^3[1]$ è formato da tutti i cubi che hanno l'*origine* O' sull'asse x_2 ($O' = (0, k, 0)$, k intero positivo o negativo). In $U_a C^3[1]$ i 3 tipi di cubi ${}_1C^4$, ${}_0C^4$, ${}_1C^4$, si ripetono nell'ordine ciclicamente.

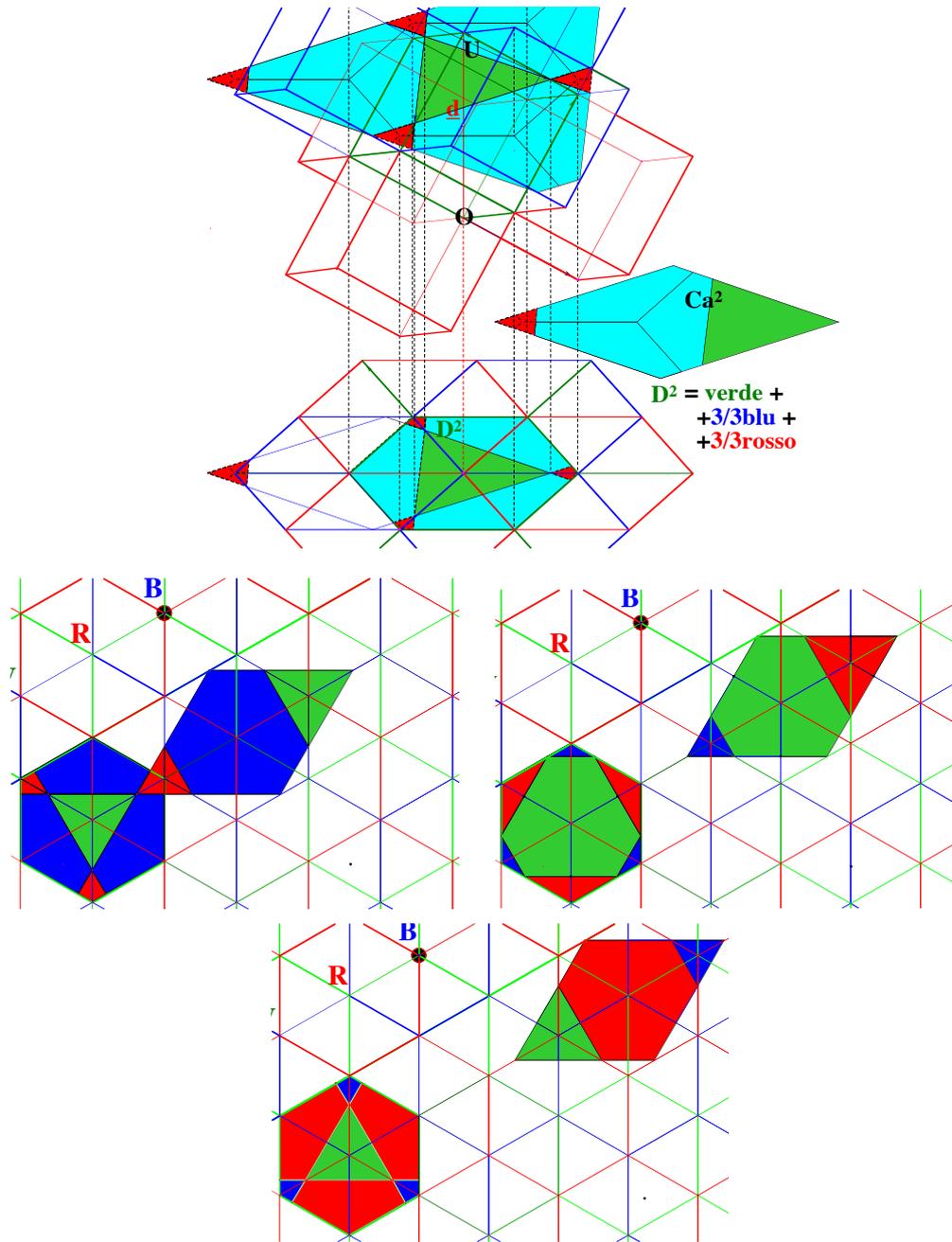
Il quadrato allungato $Ca^2(s)$



- Il **quadrato allungato** $Ca^2(s)$ è l'*intersezione* di $\sigma^2(s)$ con il profilato $U_a C^3[1]$. In simboli: $Ca^2(s) = \sigma^2(s) \cap U_a C^3[1]$. Quindi $Ca^2(s)$ è l'unione delle intersezioni con $\sigma^2(s)$ dei cubi allineati dei tre colori, che variano con s . Per s intero è nulla una *intersezione* con un C^3 , situata agli estremi con angoli acuti di $Ca^2(s) = \sigma^2(s) \cap U_a C^3[1]$ (caso limite).

- Poiché d è perpendicolare ai $\sigma^2(s)$, $Ca^2(s)$ non si modifica per proiezione.
- $Ca^2(s)$ è il modulo di una tassellazione, pulsante all'interno del modulo.
- Naturalmente $\sigma^2(s) \cap {}_0C^3[1] = C^3(1; s) = {}_h C^3(1; s-h)$, $h = -1, 0, 1$.





Nei disegni D^2 e Ca^2 sono presenti in posizione separata, ma essendo moduli tassellanti si possono considerare, ad es., con la parte verde in comune.

D^2 è: 1) equiscomponibile con Ca^2 , 2) per traslazione, 3) in un continuo di modi. In simboli: $D^2 \equiv Ca^2$

$D^2 \equiv Ca^2$ Tre dimostrazioni

- 1) D^2 contiene le proiezioni di tutte le facce di $C^3[1]$. Su queste proiezioni si sovrappone la proiezione della sezione di $C^3[1]$, che viene proiettata al centro di D^2 , e si sovrappongono le proiezioni delle sezioni dei cubi con i quali $C^3[1]$ ha una faccia in comune, limitatamente alle porzioni di queste proiezioni che vengono proiettate all'interno di D^2 . Poiché $C^3[1]$ ha ciascuna delle tre facce in O comune con una delle tre facce rosse di un ${}_1C^3[1]$ e ciascuna delle tre facce in U comuni con una della tre facce blu di ${}_1C^3[1]$, segue che D^2 , oltre ad avere al centro, come già detto, la proiezione della sezione verde di $C^3[1]$, all'esterno di questa, contiene e presenta tre volte $1/3$ delle sezioni rosse di ${}_1C^3[1]$ e tre volte $1/3$ delle sezioni blu di ${}_1C^3[1]$. Dunque sia D^2 , sia Ca^2 sono formati dalle stesse sezioni dei cubi.

Quindi D^2 e Ca^2 sono **equiscomponibili**. Le loro parti possono essere scambiate per traslazione perché nella tassellazione sono presenti allo stesso modo e soltanto in posizione diversa. Infine l'equiscomponibilità è continua perché si tratta di tassellazioni pulsanti. Queste stesse considerazioni possono essere fatte alla fine di ciascuna delle due dimostrazioni che seguono.

- 2) Considerando che tre ${}_1C^3[1]$ con in comune O e tre ${}_1C^3[1]$ con in comune U, ricoprono la superficie di ${}_0C^3[1]$, e che quindi ${}_0C^3[1]$ è al centro di questi, segue che:
- ogni D^2 si sovrappone sia a $1/3$ di tre D^2 , sia a $1/3$ di tre D^2 .
 - D^2 contiene al centro la sezione di ${}_0C^3[1]$, e tre volte $1/3$ delle sezioni rosse di ${}_1C^3[1]$ e tre volte $1/3$ delle sezioni blu di ${}_1C^3[1]$.
- 3) D^2 e Ca^2 sono due moduli che tassellano il piano, hanno la stessa area e fanno riferimento per ogni s alla stessa tassellazione del piano (si possono anche considerare con una stessa parte in comune e questo renderebbe semplice porli in corrispondenza biunivoca, ma questa proprietà non è necessaria alla dimostrazione).

(Più in generale, se all'interno di una stessa tassellazione pulsante si individuano due moduli che hanno la stessa area, questi sono equiscomponibili, per traslazione, in un continuo di modi).

QUALE DELLE TRE DIMOSTRAZIONI CONSIDERI PIU' BELLA?

(la domanda può essere ripetuta ogni volta che ci sono varie dimostrazioni)

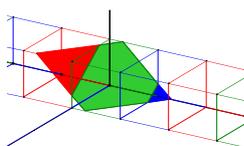
Definizioni e simboli che possono agevolare alcuni approfondimenti

Oltre ai vertici, $V(0)$, $V(1)$, $V(2)$ e $V(3)$, in un cubo $C^1[1]$, chiamiamo:

- $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, gli spigoli, $C^1[1]$, di $C^3[1]$, ove $S(h)$ va da $V(h-1)$ a $V(h)$,
- $F(1)$, $F(2)$, le facce, $C^2[1]$, di $C^3[1]$, ove $C^2[h]$ ha origine in $V(h-1)$.

- Definiamo **primo colore di un cubo allungato** il colore del cubo ${}_h C^3[1]$ sezionato da $\sigma^2(s)$, la cui *origine* ha nel pedice il valore minore di h .

Così il primo colore di $Ca^2(1,3) = \sigma^2(1,3) \cap U_a C^3[1]$ è rosso. In particolare, poiché ${}_1 C^3[1]$ ha origine in $(-1,0,0)$, viene intersecato da $\sigma^2(1,3)$ nei suoi tre $S(3)$, e quindi in un triangolo “rivolto verso il basso” come gli spigoli in U . Si ottiene cioè la stessa sezione che ${}_0 C^3[1]$ otterrebbe con $\sigma^2(2,3)$. Poi $\sigma^2(1,3)$ interseca ${}_0 C^3[1]$ in ${}_0 C^3(1;1,3)$, nei suoi sei spigoli $V(2)$, intersecati in un vertice, e sia nelle tre facce $F(1)$, sia nelle tre facce $F(2)$, intersecati da $\sigma^2(1,3)$ in sei lati. Quindi ${}_0 C^3(1;1,3)$ è un esagono. Infine $\sigma^2(1,3)$ interseca ${}_1 C^3[1]$ vicino alla sua *origine*, in un triangolino blu.



DOMANDE

(che bello! se fossero domande inventate dagli studenti per delle gare ove dare risposte con argomentazioni o dimostrazioni da confutare o perfezionare)

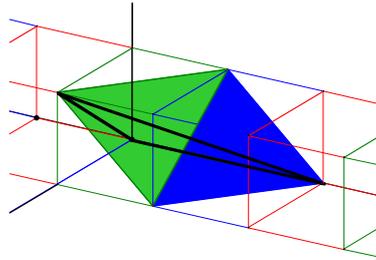
- **D1)** Qual è la lunghezza della **diagonale lunga**, dl , di un cubo allungato?
- **D2)** Come è fatto il dodecaedro rombico D^2 ? Quali sono le sue misure?
- **D3)** Quali sono le sezioni e i colori di $Ca^2(2,3)=?$
- **D4)** Perché i D^2 tassellano $\sigma^2(s)$ formando la tassellazione pulsante $\mathbb{T}\sigma^2(s)$?
- **D5)** In $\mathbb{T}C^3$ quanti C^3 hanno in comune lo stesso vertice, lo stesso spigolo e la stessa faccia?
- **D6)** Quanti “colori ha” un vertice, uno spigolo e una faccia di $\mathbb{T}C^3$?
- **D7)** Di quali poligoni, precisando i colori e le misure, è formata $\mathbb{T}\sigma^2(1)$?
- **D8)** Di quali poligoni, precisando i colori, è formata $\mathbb{T}\sigma^2(1,5)$?
- **D9)** Che colore hanno i vertici su $\mathbb{T}\sigma^2(0)$?
- **D10)** Che colore hanno i nodi (punti a coordinate intere) di $T^2(5)$?

...

La risposta a **Dh)** si trova nelle RISPOSTE che seguono, in **Rh)**.

RISPOSTE (ed eventuali altre domande) e CONSEGUENZE

- **D1)** Quanto è lunga la **diagonale lunga**, dl , di un cubo allungato, Ca^2 ?
 - **R1)**

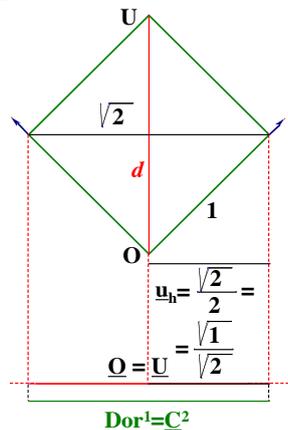


Con **Pitagora**: $dlCa^2 = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}\sqrt{3}$ (*gdf = la generalizzazione in d dimensioni si ottiene facilmente: $dlCa^d = \sqrt{d}\sqrt{d+1}$*).

Conseguenze:

- a) il quadrato allungato Ca^2 è C^2 allungato lungo una diagonale secondo $\sqrt{3}$ lasciando invariata la distanza dei punti di C^2 da tale diagonale.
 b) l'**area** di Ca^2 è $\sqrt{3}$ ($Ca^2 = \sqrt{3}$) (*gdf: $Ca^d = \sqrt{d+1}$, $Cc^d = 1/\sqrt{d+1}$ v. oltre*).

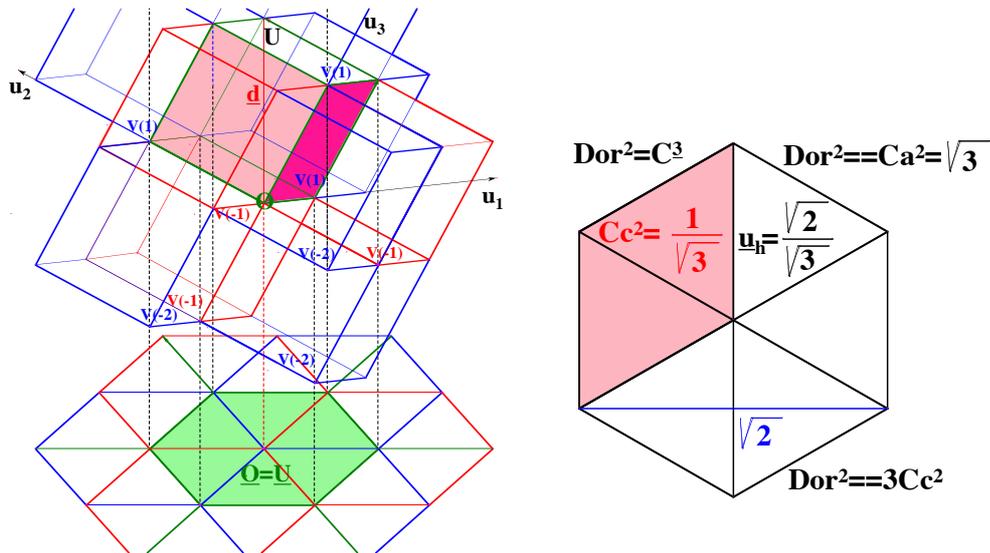
- **D2)** Come è fatto il dodecaedro rombico D^2 ? Quali sono le sue misure?
 - **R2)** Cominciamo da $D^1 = C^2$.



Dor^1 è la **proiezione** di $C^2[1]$ nella direzione di una sua diagonale $d = \sqrt{2}$, su una retta, $\underline{\sigma}^1$, perpendicolare a d .

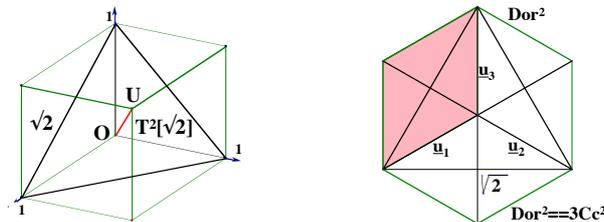
$Dor^1 = \sqrt{2}$, ha due vertici esterni e uno doppio, $\underline{O} = \underline{U}$, interno.

$$\mathbf{Dor}^2 = \underline{\mathbf{C}^3}$$



Ricordo che \mathbf{Dor}^2 è la *proiezione* di $\mathbf{C}^3[1]$ nella direzione di una sua diagonale $d = \sqrt{3}$, su un piano, $\underline{\sigma}^2$, perpendicolare a d . I \mathbf{Cc}^2 , detti *quadrati compresi*, sono le proiezioni dei quadrati di $\mathbf{C}^3[1]$ (vedi figura).

I vettori \mathbf{u}_h di $\mathbf{C}^3[1]$ formano a coppie lo stesso angolo (retto) e vengono visti da d in modo simmetrico, quindi anche le loro proiezioni sul piano $\underline{\sigma}^2$, perpendicolare a d , debbono formare a coppie lo stesso angolo, che è quindi di 120° , cioè possono essere visti come i segmenti, *raggi*, che congiungono il centro del triangolo equilatero, $\mathbf{T}^2[\sqrt{2}]$, con i vertici, che noi conosciamo.



Si tratta del triangolo equilatero nel cubo, $\mathbf{T}^2[\sqrt{2}]$, indicato in figura, che non si modifica per proiezione perché è perpendicolare a $d=OU$. Quindi sappiamo anche che la diagonale lunga del \mathbf{Cc}^2 ha lunghezza $\sqrt{2}$ (**gdf**).

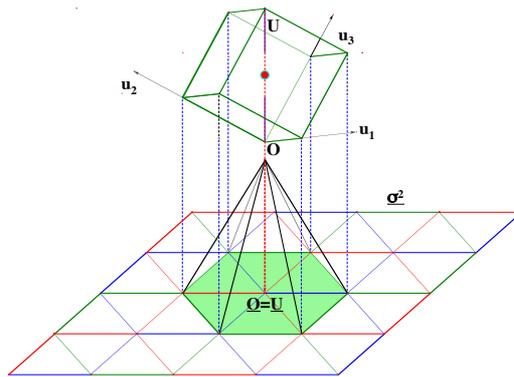
Area $D^2 = \sqrt{3}$.

Tre dimostrazioni:

1) D^2 è scomponibile con due $T^2[\sqrt{2}] = \sqrt{3}/2$. Segue: $D^2 = 2\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$.

2) Lo scorrimento fino a σ^2 dei *profilati infinitesimi* che compongono C^3 , di sezione quadrata, $d\xi$, $d\psi$, paralleli alla diagonale \underline{d} , proiettati su σ^2 , formano una piramide che ha lo stesso volume **unitario** di C^3 ed altezza, $\sqrt{3}$, uguale alla diagonale di C^3 . Il volume della piramide è misura di base per altezza diviso 3, e poiché l'altezza è $\sqrt{3}$, la misura della base deve essere $\sqrt{3}$:

$Dor^2 = \sqrt{3}$ (si può vedere bene considerando il cubo come somma di *gnomoni* sempre più piccoli proiettati in esagoni, a partire dallo gnomone formato dai tre quadrati di C^3 che hanno in comune il vertice O e che ha come spessore una porzione infinitesima di $OU = \underline{d} = \sqrt{3}$) (**gdf: $Dor^d = \sqrt{d+1}$**).



3) D^2 è equiscomponibile con un $Ca^2[\sqrt{2}] = \sqrt{3}$.

Conseguenze:

Da $D^2 = \sqrt{3}$, poiché D^2 contiene tre Cc^2 , segue:

- $Cc^2 = \sqrt{3}/3 = 1/\sqrt{3}$ (**gdf: $Cc^d = 1/\sqrt{d}$**).

- Cc^2 è **C^2 compresso** lungo una diagonale secondo $\sqrt{3}$ lasciando invariata la distanza dei suoi punti dalla diagonale.

- da $Cc^2 = 1/\sqrt{3}$, sapendo che la diagonale lunga di tale rombo è $\sqrt{2}$, segue che la diagonale corta, \underline{u}_h , è tale che $\underline{u}_h \cdot \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{3}$, cioè **$\underline{u}_h = \sqrt{2}/\sqrt{3}$**

- **raggio** di $Dor^2 =$ **raggio** di $T^2[\sqrt{2}] = \underline{u}_h = \sqrt{2}/\sqrt{3}$.

Tre dimostrazioni:

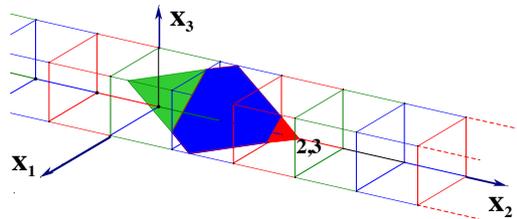
1) il risultato è già stato trovato precedentemente attraverso l'**area** e la **diagonale lunga** del **rombo** Cc^2 .

2) con Pitagora. Poiché la distanza fra l'origine O e il $T^2[\sqrt{2}]$ già considerato è la terza parte della diagonale del cubo ($\sigma^2(h)$ interseca i vertici di C^3 in piani equidistanti). Segue: (la proiezione dello spigolo unitario del cubo, \underline{u}_h)² = quadrato spigolo meno quadrato della distanza di $\sigma^2(1)$ da O .

$$\underline{u}_h = \sqrt{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \sqrt{1 - 1/3} = \sqrt{2}/\sqrt{3}. \quad (\text{gdf: } \underline{u}_h = \sqrt{d}/\sqrt{d+1}).$$

3) \underline{u}_h è 2/3 dell'altezza, $\sqrt{3}/\sqrt{2}$, di T^2 (altezza che è 1/2 della diagonale lunga, $\sqrt{2}\sqrt{3}$, di Ca^2 , ove $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{((\sqrt{2})^2 + 2^2)} = \sqrt{6}$) e $2/3 \times \sqrt{3}/\sqrt{2} = \sqrt{2}/\sqrt{3}$.

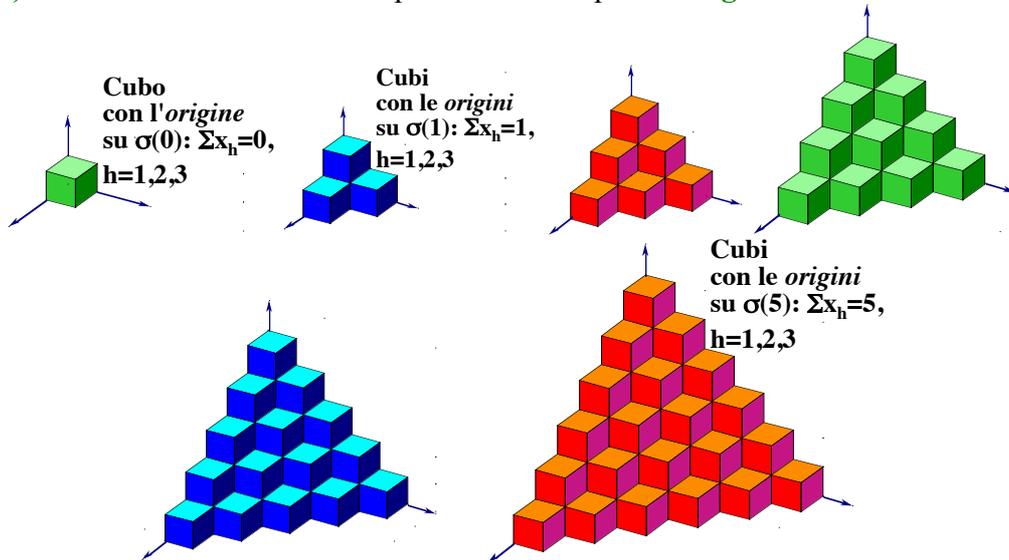
- **D3)** Quali sono le sezioni e i colori di $Ca^2(2,3)$ =?
- **R3)** Uno dei significati della parola **“teorema”** in alcune lingue orientali è **“osserva”**.



- **D4)** Perché i D^2 tassellano $\sigma^2(s)$ formando la tassellazione pulsante $T\sigma^2(s)$?

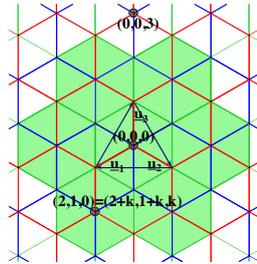
- **R4) Tre dimostrazioni**

1) Osserva i cubi dell'ottante positivo dello spazio. **Ragiona induttivamente.**



(quanto mostrato risolve anche questioni di **Calcolo delle probabilità**)

2) $-1\mathbb{T}\mathbb{D}^2$, $0\mathbb{T}\mathbb{D}^2$, $1\mathbb{T}\mathbb{D}^2$ che **sembrano** tassellazioni lo sono effettivamente?



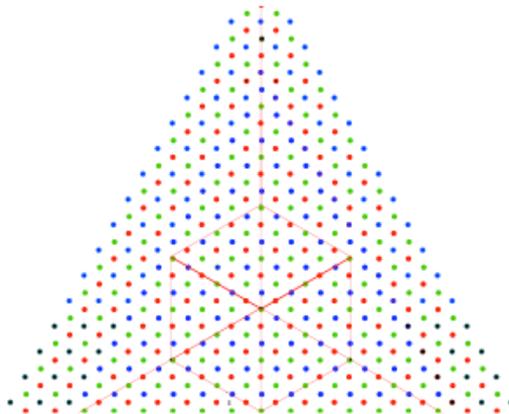
Verifichiamo

I tre \mathbf{u}_h danno origine ad un nuovo sistema di riferimento definito a meno di una costante additiva (infatti, seguendo un triangolo equilatero di ampiezza qualsiasi a partire da un punto, si ritorna al punto di partenza (proiezione)).

Il problema è: dato un \mathbb{D}^2 , ad esempio quello che al centro ha il punto $(0,0,0)$, gli esagoni verdi che sembrano contigui, cioè i \mathbb{D}^2 che in figura sono indicati “in modo tassellante”, lo sono effettivamente? Sì, perché questi esagoni se fossero tassellanti dovrebbero avere i centri nei $3!$ anagrammi delle coordinate di $(2,1,0)$, e questi \mathbb{D}^2 esistono effettivamente perché le coordinate indicano cubi esistenti che hanno le loro origini su $\sigma^2(3k)$ (notare l'indipendenza con quanto mostrato in 1)) (*gdf*).

Conseguenze derivanti da 1) o da 2)

I **nodi** (punti a coordinate intere) di $\mathbb{T}^2(3k)$, $\mathbb{T}^2(3k+1)$, $\mathbb{T}^2(3k+2)$, sono rispettivamente e unicamente **verdi**, **blu** e **rossi**. Sovrapponendoli si ottiene:



Chi non ha il colore, può immaginare un **albero di Natale** pieno di palline colorate che, con un DGS (Cabri, Geogebra,...), si possono accendere a intermittenza, utili anche per la somma di dadi nel Calcolo delle probabilità. **AUGURI**.

3) Vedi la parte contrassegnata da * nella risposta a **D6**).

- **D5**) In $\mathbb{T}C^3$ quanti C^3 hanno in comune lo stesso vertice, lo stesso spigolo e la stessa faccia?

- **R5**) un vertice è comune a **8 cubi** (“4 sotto e 4 sopra”), uno spigolo è comune a **4 cubi**, una faccia è comune a **2 cubi** (*gdf*).

- **D6**) Quanti “colori ha” un vertice, uno spigolo e una faccia di $\mathbb{T}C^3$?

- **R6**)

- In un $V(0)=O$ verde di ${}_0C^3[1]$ ci sono:

due vertici verdi: il $V(0)$ di ${}_0C^3[1]$ e il $V(3)$ di ${}_{-3}C^3[1]$,

tre vertici rossi: i $V(1)$ di tre ${}_{-1}C^3[1]$,

tre vertici blu: i $V(2)$ di tre ${}_{-2}C^3[1]$.

In generale sempre in ${}_0C^3[1]$ in ogni vertice di un certo colore ci sono due vertici dello stesso colore e tre vertici di ciascuno dei tre cubi degli altri due colori.

- In un $S(1)$ verde di ${}_0C^3[1]$ ci sono:

uno spigolo verde $S(1)$ di ${}_0C^3[1]$,

due spigoli rossi $S(2)$ dei ${}_{-1}C^3[1]$,

uno spigolo blu $S(3)$ dei ${}_{-2}C^3[1]$.

- In un $S(2)$ verde di ${}_0C^3[1]$ ci sono:

due spigoli verdi $S(2)$ di due ${}_0C^3[1]$, simmetrici,

uno spigolo rosso $S(3)$ di ${}_{-1}C^3[1]$,

uno spigolo blu $S(1)$ dei ${}_1C^3[1]$.

* Tutti i ${}_0C^3[1]$ verdi, formano quindi una specie di tessitura verde senza buchi, perché sono uniti negli spigoli verdi, $S(2)$, che in ogni cubo sono sei, e sono quelli che vengono proiettati negli esagoni dei D^2 verdi, che quindi formano una **tassellazione**. Il discorso non cambia considerando gli altri colori.

- In un $S(3)$ verde di ${}_0C^3[1]$ ci sono:

un spigolo verde $S(3)$,

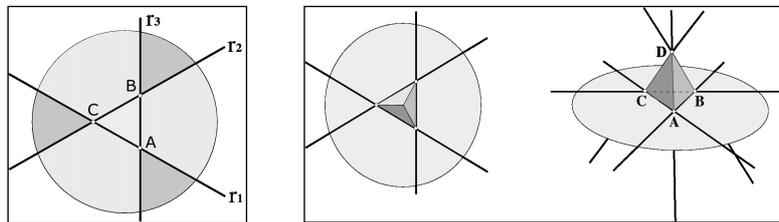
uno spigolo rosso $S(1)$,

due spigoli blu $S(2)$.

- Infine, in una qualsiasi faccia di $\mathbb{T}C^3$ “combaciano” due facce: una del colore del cubo ${}_hC^3[1]$ e una del “colore successivo” del cubo ${}_{h+1}C^3[1]$.

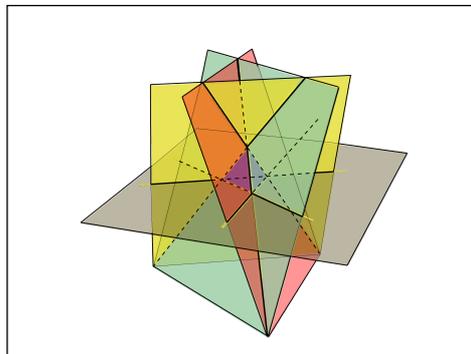
- **D7)** Mentalmente: che colore hanno i nodi (punti a coordinate intere) di $T^2(5)$?
- **R7) Rosso.** Vedi R4)2.
- **D8)** Mentalmente: che colori ci sono su $\mathbb{T}\sigma^2(0)$?
- **R8) i nodi sono verdi.** Quindi ci sono soltanto triangoli equilateri uguali, blu e rossi. Vedi quanto precede.
- **D9)** Mentalmente: di quali poligoni è formata $\mathbb{T}\sigma^2(1)$?
- **R9) i nodi sono blu.** Quindi ci sono soltanto triangoli equilateri uguali, rossi e verdi. Vedi quanto precede.
- **D10)** Mentalmente: di quali poligoni è formata $\mathbb{T}\sigma^2(1,5)$?
- **R10) Esagoni regolari verdi, triangoli blu e triangoli rossi** con lo stesso spigolo di quelli blu.

Altri problemi interessanti non vengono esaminati ora per dare spazio ad argomenti che possono essere utili per esercitare l'**analogia** e l'**induzione**.



Disegni utili

L'interno del triangolo è individuato da tre punti; le 3 zone sui lati del triangolo sono individuate da 2 punti e le 3 sui vertici del triangolo da 1 punto.



Interno=(1,1,1),

poi (0,1,1,1) ...

C⁴[1]

Definizione: $C^4[1] = \{x=(x_1, x_2, x_3, x_4): 0 \leq x_h \leq 1, h=1,2,3,4\}$.

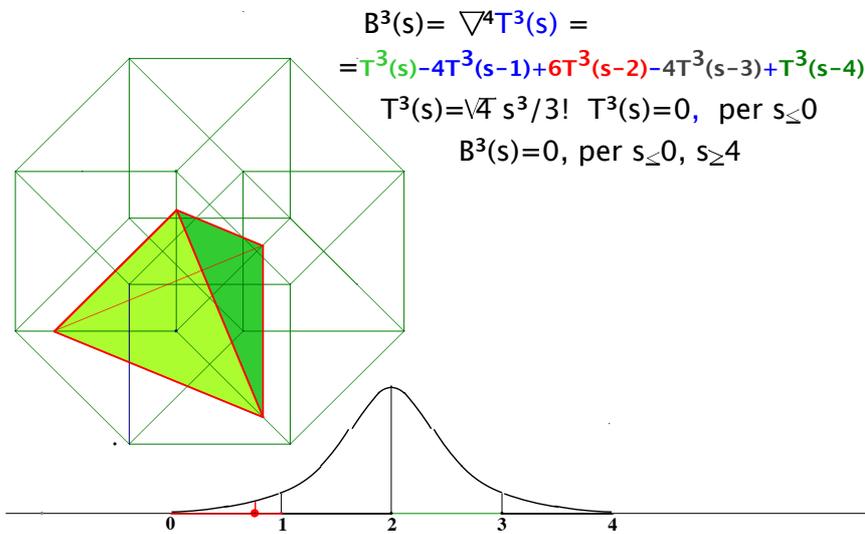
Due ipercubi “contigui” sono disgiunti dal punto di vista della quarta dimensione perché hanno in comune soltanto una faccia, C³. cubica (ad es. i due ipercubi $\{x=(x_1, x_2, x_3, x_4): 0 \leq x_h \leq 1, h=1,2,3,4\}$ e $\{x=(x_1, x_2, x_3, x_4): 0 \leq x_h \leq 1, h=1,2,3, 1 \leq x_4 \leq 2\}$ hanno in comune $C^3 = \{x=(x_1, x_2, x_3): 0 \leq x_h \leq 1, h=1,2,3\}$).

Vertici di C⁴[1] e loro colore

C⁴[1] è intersecato da $\sigma^3(\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^4 x_j = h, h = 0,1,2,3,4$, nei seguenti vertici

V(n): **un V(0)=O=(0,0,0,0)**, **quattro V(1)**, **sei V(2)**, **quattro V(3)**, **un V(4)=U=(1,1,1,1)**, ove il loro numero è individuato dal numero degli anagrammi delle coordinate dei vertici che contengono rispettivamente **h** coordinate uguali ad **uno** e **4-h zeri**, h = 0,1,2,3,4. Tutti i vertici di C⁴[1] sono del tipo V₄ perché da ogni vertice escono 4 spigoli.

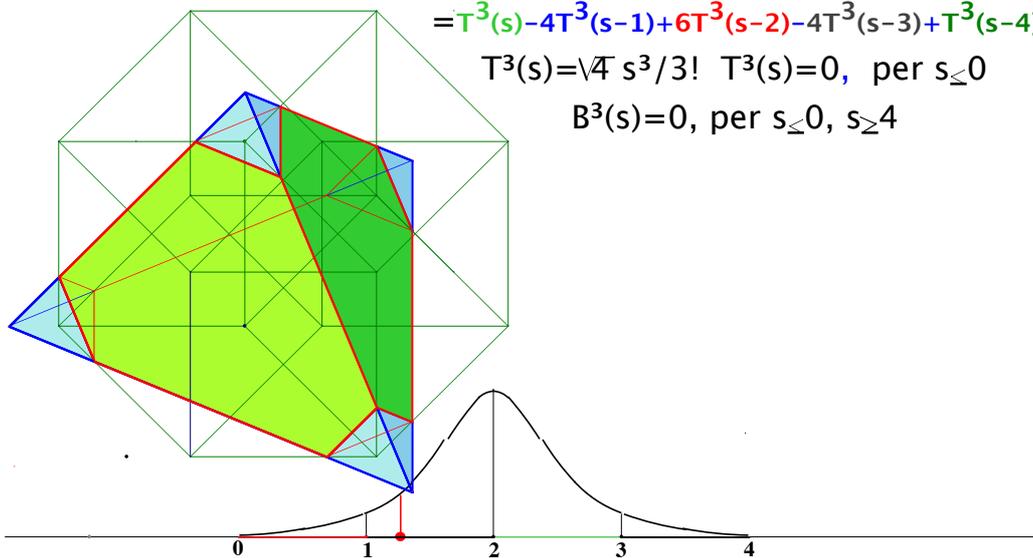
Sezioni di C⁴[1]: C⁴(1;s) è la sezione di C⁴[1] con $\sigma^3(s)$



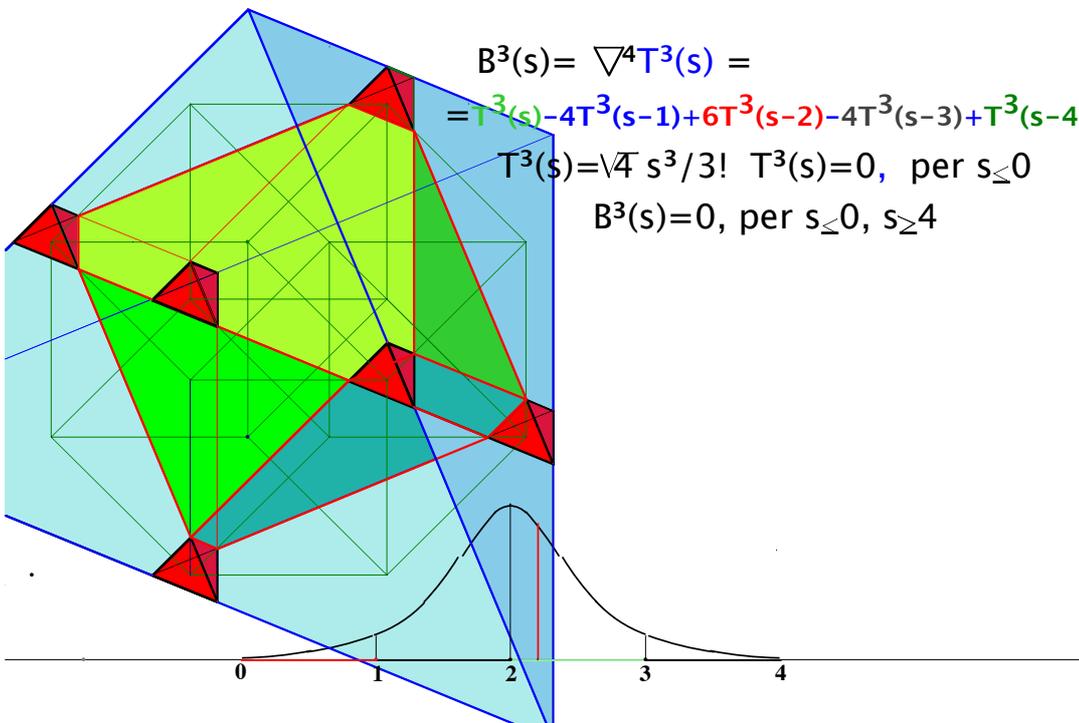
Poiché $\sigma^2(\mathbf{h})$ su 3 assi dà un triangolo, e le terne su 4 assi sono 4, si ha un tetraedro i cui 4 triangoli si ottengono ponendo una coordianta uguale a zero in

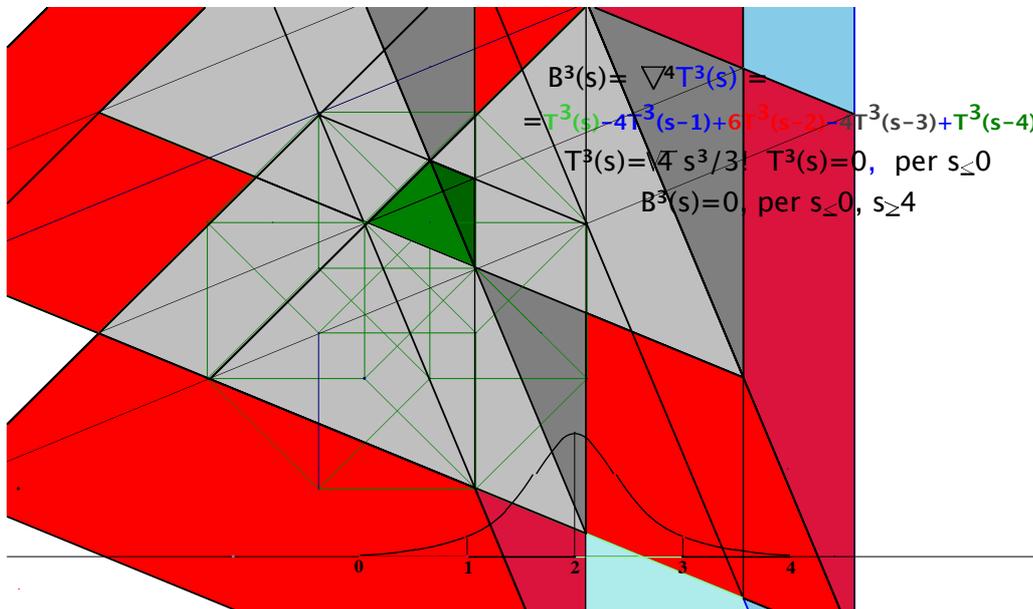
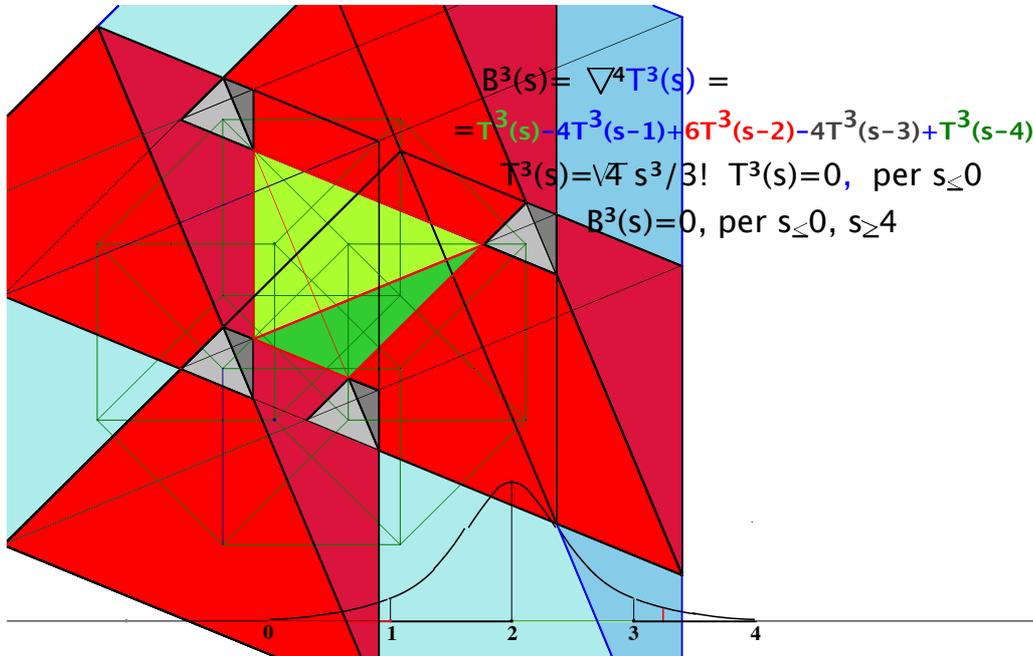
$\sigma^3(\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^4 x_j$, con due nulle si hanno i 6 spigoli, e con tre nulle i 4 vertici.

$$\begin{aligned}
 B^3(s) &= \nabla^4 T^3(s) = \\
 &= T^3(s) - 4T^3(s-1) + 6T^3(s-2) - 4T^3(s-3) + T^3(s-4) \\
 T^3(s) &= \sqrt{4} s^3 / 3! \quad T^3(s) = 0, \text{ per } s \leq 0 \\
 B^3(s) &= 0, \text{ per } s \leq 0, s \geq 4
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 B^3(s) &= \nabla^4 T^3(s) = \\
 &= T^3(s) - 4T^3(s-1) + 6T^3(s-2) - 4T^3(s-3) + T^3(s-4) \\
 T^3(s) &= \sqrt{4} s^3 / 3! \quad T^3(s) = 0, \text{ per } s \leq 0 \\
 B^3(s) &= 0, \text{ per } s \leq 0, s \geq 4
 \end{aligned}$$





(vedi *Progetto Alice* n. 26, pp. 191-130).

Tassellazione con i $C^4[1]$. Loro sezioni, simboli e colori

La tassellazione, $\mathbb{T}C^4$, di R^4 con gli ipercubi si ottiene traslando $C^4[1]$ in tutti i modi secondo vettori con coordinate intere positive, negative o nulle, ottenendo tutti i $C^4[1]$ che hanno i vertici con coordinate intere. I $C^4[1]$ vengono colorati in **rosso**, **verde**, **blu**, e **nero** ed indicati rispettivamente con $_{-1}C^4$, $_0C^4$, $_1C^4$, $_2C^4$ a seconda che il loro corrispondente per traslazione del vertice O di $C^4[1]$ (o, che è lo stesso, del corrispondente U' del vertice U), detto *origine O'* di $C^4[1]$, abbia somma delle coordinate: $4k-1$, $4k$, $4k+1$, $4k+2$, k intero positivo, negativo o nullo.

- Così nei seguenti vertici di $C^4[1]$: **un** $V(0)=O=(0,0,0,0)$, **quattro** $V(1)$, **sei** $V(2)$, **quattro** $V(3)$, **un** $V(4)=U=(1,1,1,1)$, ci sono rispettivamente le origini di **un** $_0C^4 = C^4[1]$, **quattro** $_1C^4$, **sei** $_2C^4$, **quattro** $_{-1}C^4$ e un $_0C^4$.

- $\sigma^3(s) \cap \mathbb{T}C^4$, al variare di s , dà origine ad una *tassellazione pulsante*, $\mathbb{T}\sigma^3(s)$, del piano $\sigma^3(s)$ che ripete ciclicamente le tassellazioni ottenute per $0 \leq s \leq 4$.

Spigoli e nuova definizione di $C^4[1]$

Sugli assi coordinati x_h ci sono i quattro spigoli di $C^4[1]$ che vanno da O ai $V(1)$. Su questi quattro spigoli, mantenendo il verso indicato, si sovrappongono quattro vettori unitari u_h , detti vettori *generatori*. In questo modo $C^4[1]$ e i suoi spigoli sono individuabili dalle 4! *passegiate* da O ad U determinabili dagli anagrammi di $u_1u_2u_3u_4$.

$C^4[1]$ è la *proiezione* di $C^4[1]$ che dà origine ad un dodecaedo rombico Dor^3

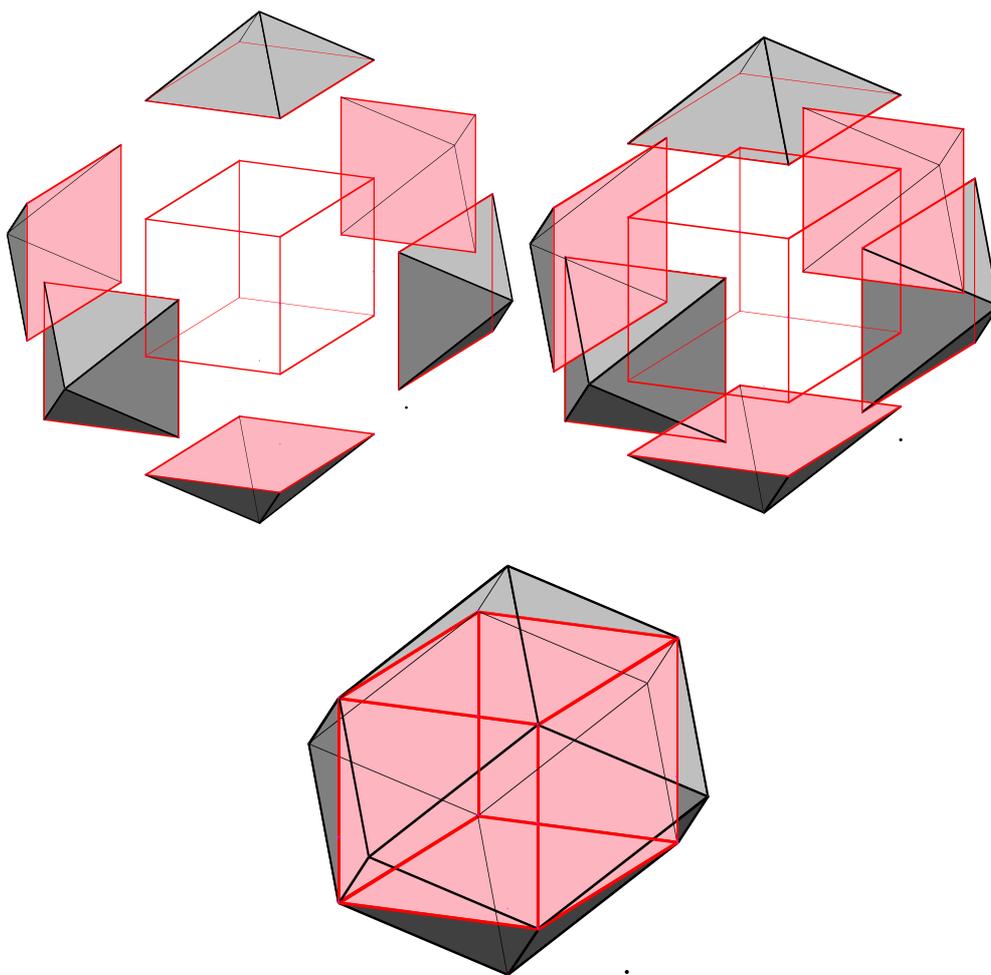
Proiettando $C^4[1]$ nella direzione di $\underline{d}=OU$, su uno spazio $\sigma^3(c) = \sum_{j=1}^4 x_j = c$

(perpendicolare a d), si individua $Dor^3 = C^4[1]$ che, quindi, è costruibile con le 4! *passegiate* ottenute con le permutazioni delle *proiezioni* \underline{u}_k degli u_k . La misura degli \underline{u}_k e gli angoli fra ogni coppia di questi si possono individuare anche attraverso i segmenti, detti *raggi*, che uniscono il centro di uno dei tetraedri regolari, $T^3[\sqrt{2}] = T^3(1)$, iscritti in un $C^3[1]$, con i vertici.

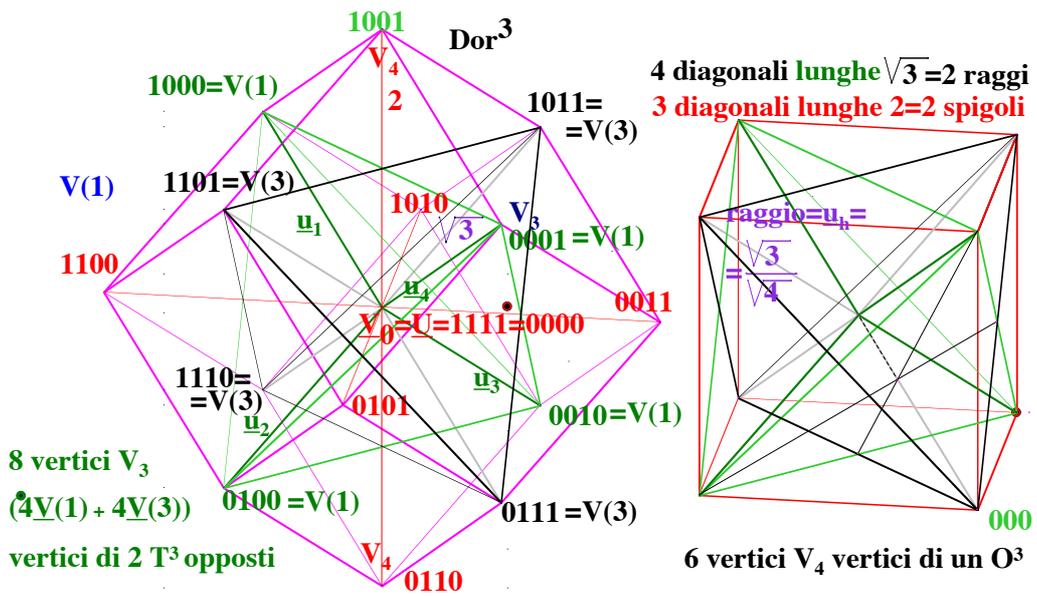
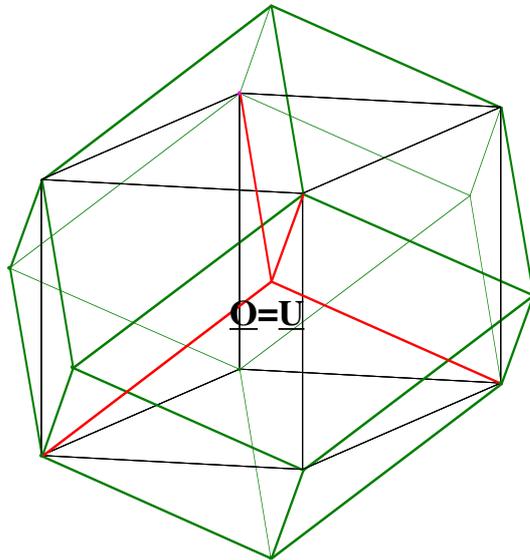
- Dor^3 viene indicato anche con D^3 .

- Poiché la proiezione non varia al variare di c , lo spazio $\sigma^3(c)$ verrà indicato con $\underline{\sigma}^3$.

Nei testi che ho esaminato, D^3 è ottenuto soltanto attraverso due cubi uguali, di cui uno è diviso nelle sei piramidi che si ottengono proiettando le sue facce dal centro, nel modo seguente:



Nell'articolo che sarà pubblicato nel prossimo numero di *Progetto Alice* verrà mostrato come D^3 possa essere ottenuto in un **infinito continuo di modi** per **equiscomponibilità** e per **traslazione** attraverso i **tetraedri** e i **tetraedri tronchi**. Per adesso vengono illustrate alcune definizioni sottolineando molti aspetti particolari che possono essere utili per calcolare le varie misure, per scoprire molte **proprietà e generalizzarle in dimensione qualsiasi** sfruttando anche quanto indicato in D^2 utilizzando *l'analogia e l'induzione* e le *immagini mentali*.

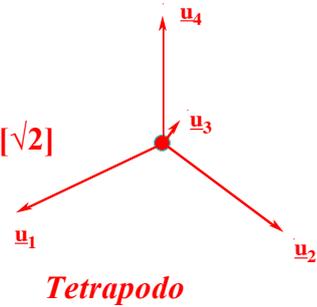


- **Proiettando** \mathbb{C}^4 sullo spazio $\sigma^3(s)$, si ottengono quattro tipi di **tassellazioni** sovrapposte che mantengono i colori: **rossi**, **verdi**, **blu**, e **neri**:

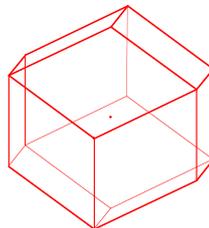
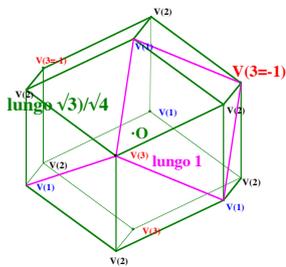
$$-1 \mathbb{C}^4, 0 \mathbb{C}^4, 1 \mathbb{C}^4, 2 \mathbb{C}^4.$$

I 4 TIPI DI D^3

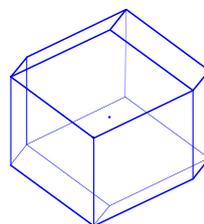
Con gli anagrammi dei **raggi** $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4$, di un $T^3[\sqrt{2}]$ (che sono proiezioni dei quattro versori unitari u_1, u_2, u_3, u_4 di C^4) costruiamo un:



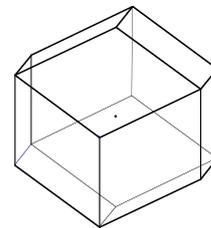
${}_0Dor^3$ (verde Dor^3 ha centro nel punto O)



${}_{-1}Dor^3$

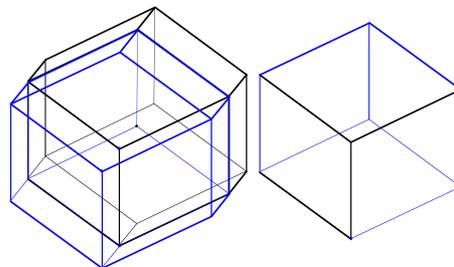


${}_1Dor^3$

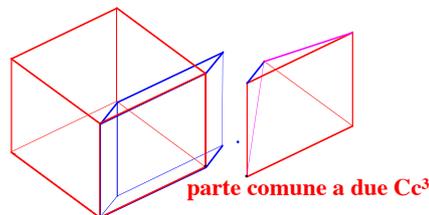


${}_2Dor^3$

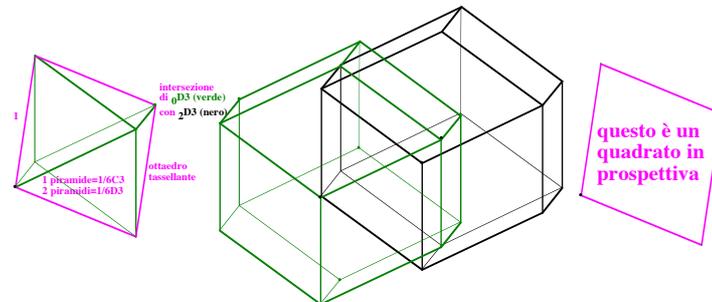
Cc^3 è la parte comune di ${}_2Dor^3$ e ${}_1Dor^3$



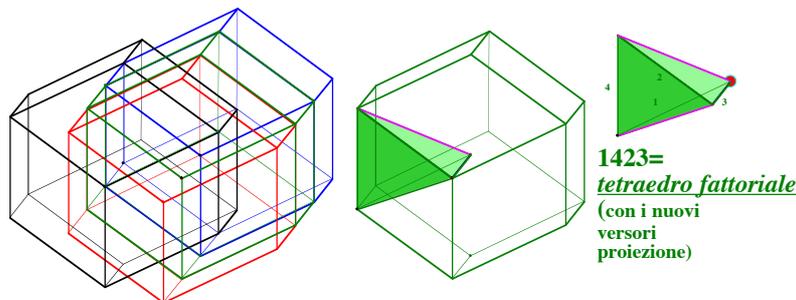
Una piramide tassellante è la parte comune di due Cc^3



L'ottaedro tassellante è l'intersezione di ${}_0\text{Dor}^3$ e ${}_2\text{Dor}^3$



Intersezione dei quattro tipi di Dor^3



- Un **profilato** di $C^4[1]$ indica l'**unione** infinita di cubi $C^4[1]$ **allineati**. Si indica con $U_a C^4[1]$. Ad esempio $U_a C^4[1]$ è formato da tutti i $C^4[1]$ che hanno l'*origine* O' sull'asse x_2 ($O' = (0, k, 0, 0)$, k intero positivo, negativo o nullo). In $U_a C^4[1]$ i quattro tipi di cubi ${}_1C^4$, ${}_0C^4$, ${}_2C^4$, ${}_3C^4$, si ripetono nell'ordine ciclicamente.

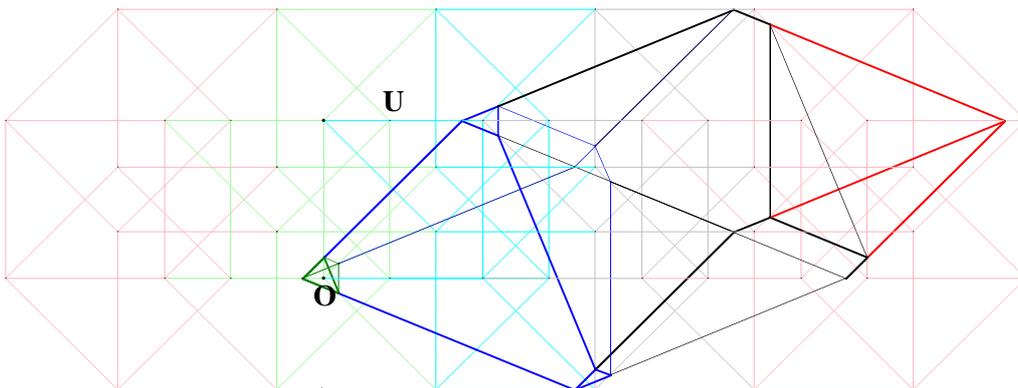
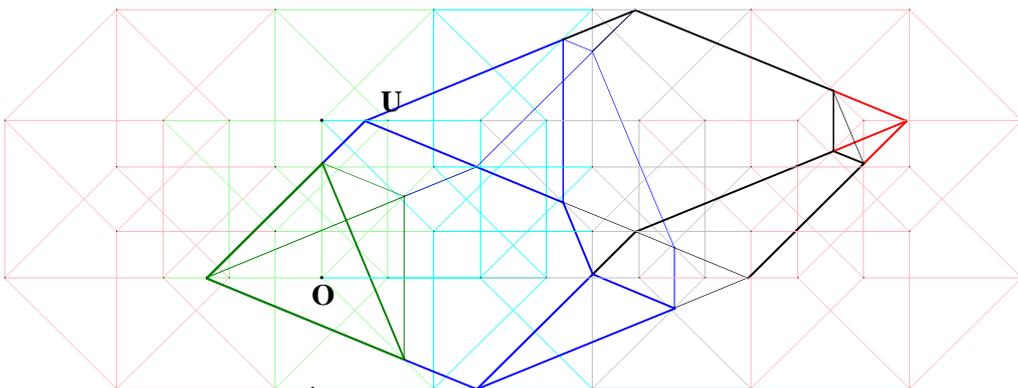
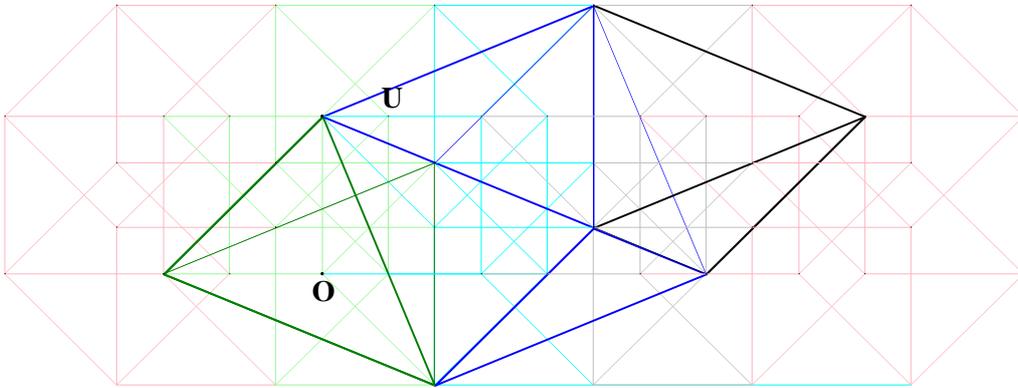
Il cubo allungato $Ca^3(s)$

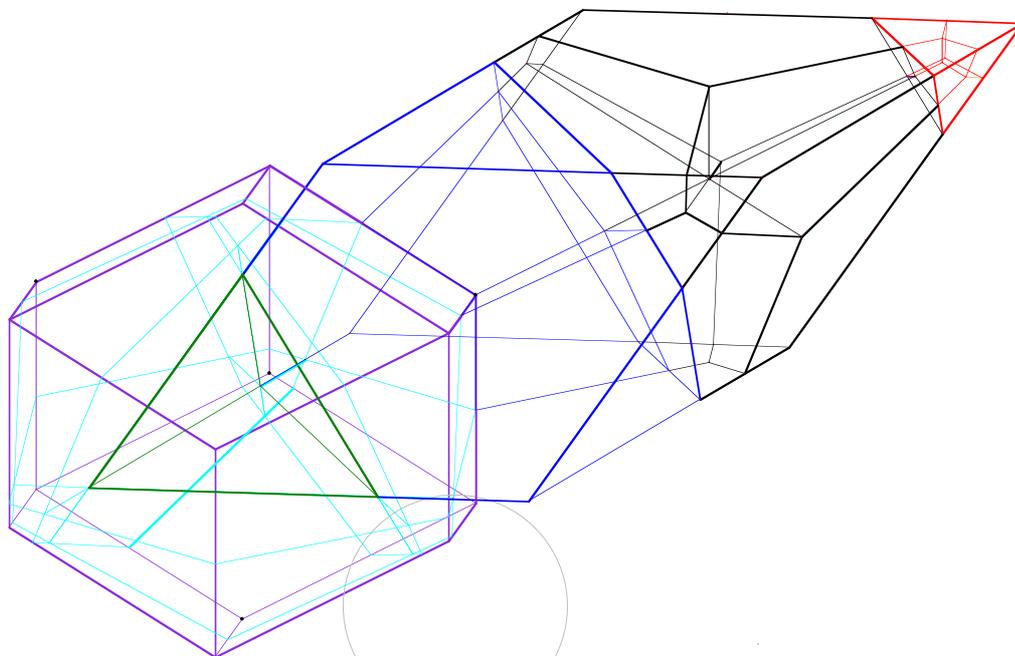
Il cubo allungato $Ca^3(s)$ è l'*intersezione* di $\sigma^3(s)$ con il profilato $U_a C^4[1]$.

In simboli: $Ca^3(s) = \sigma^3(s) \cap U_a C^4[1]$.

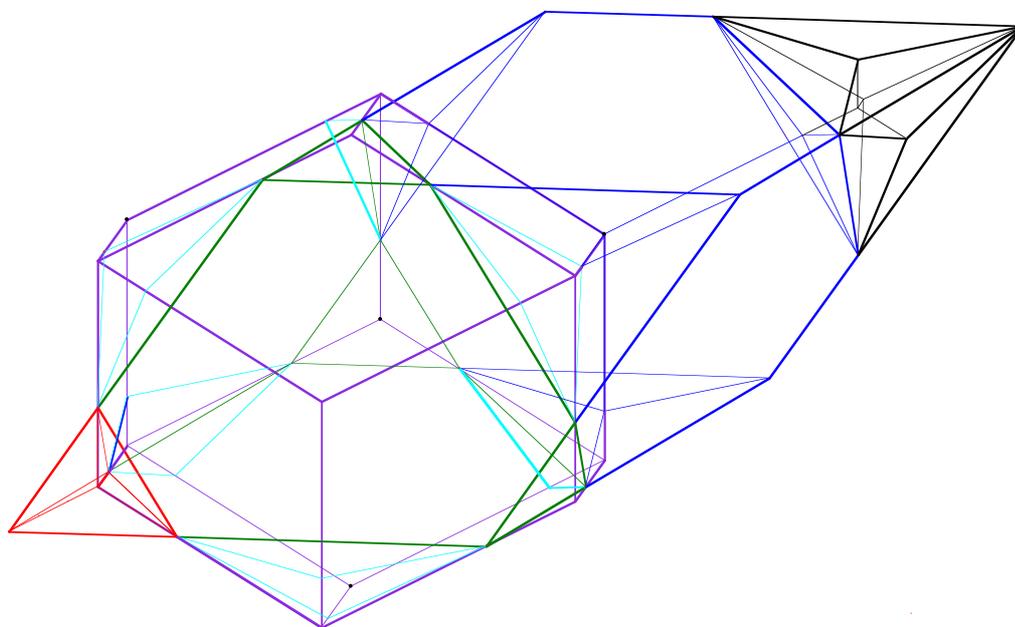
Quindi $Ca^3(s)$ è l'unione delle intersezioni con $\sigma^3(s)$ degli ipercubi allineati dei quattro colori che variano con s . Per s intero è nulla una *intersezione* con un C^4 situata agli estremi con angoli acuti di $Ca^3(s) = \sigma^3(s) \cap U_a C^4[1]$ (caso limite).

- Poiché d è perpendicolare ai $\sigma^3(s)$, $Ca^3(s)$ non si modifica per proiezione,
- $Ca^3(s)$ è il modulo di una tassellazione pulsante (all'interno del modulo).

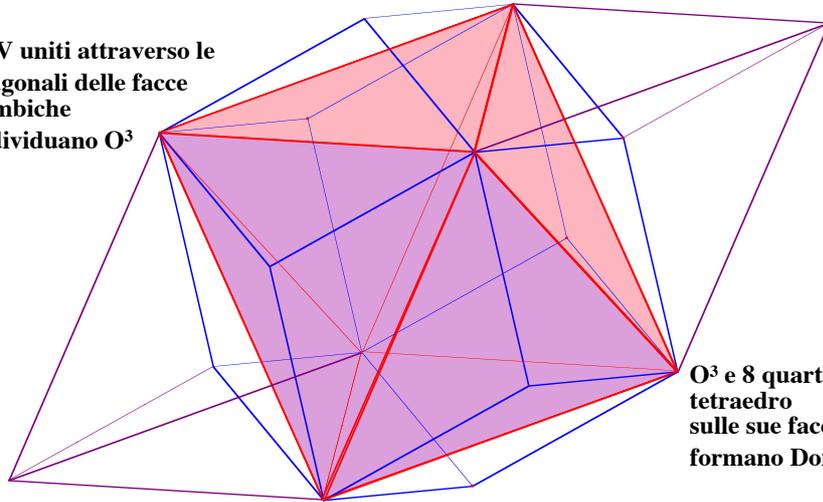




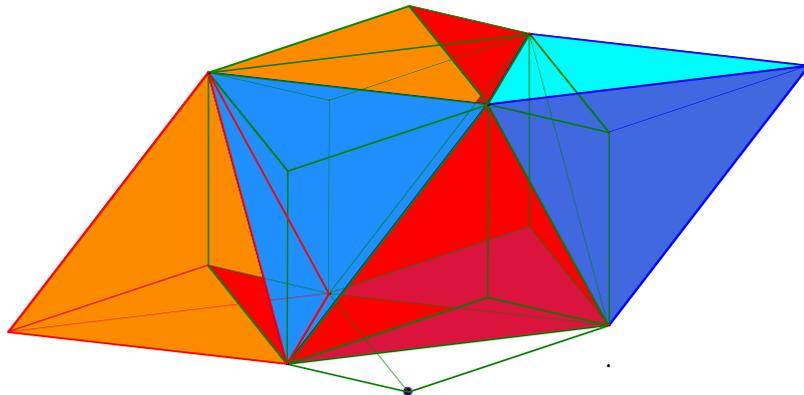
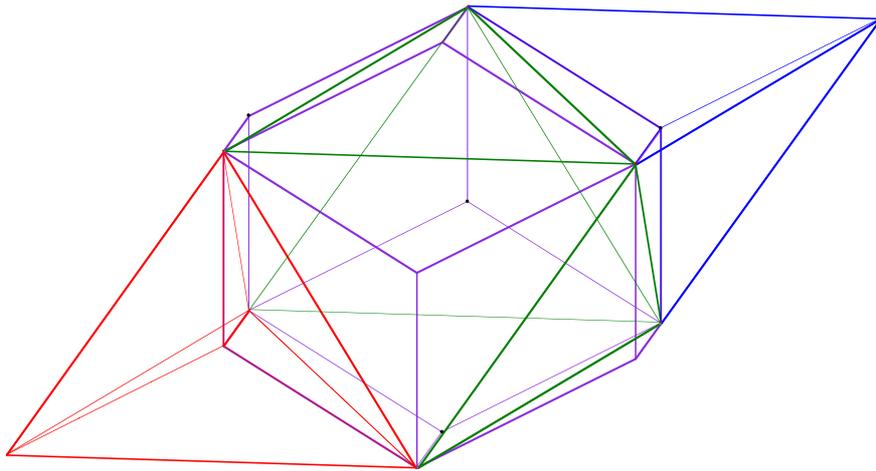
Al variare di s in $\sigma^3(s)$ variano le parti che compongono Ca^3 e Dor^3 .

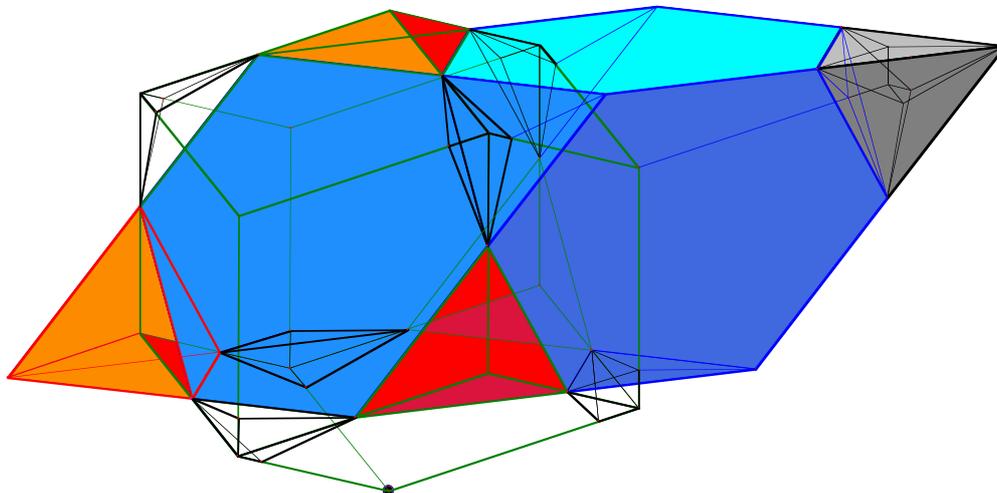


$6_4 V$ uniti attraverso le
diagonali delle facce
rombiche
individuano O^3

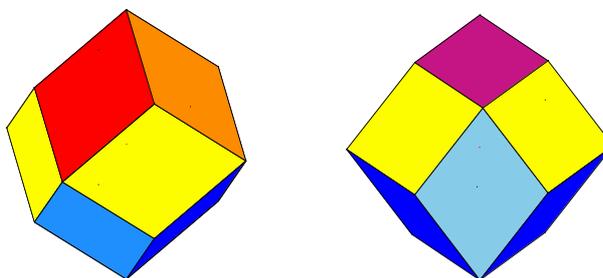


O^3 e 8 quarti di
tetraedro
sulle sue facce
formano Dor^3





Alcuni considerano affascinante guardare un Dor^3 con la superficie colorata da vari colori, mentre ruota dopo averlo realizzato con un DGS (Cabri, GeoGebra, ...) sfruttando le sue proprietà dinamiche ("per il resto" il disegno è uguale a quello fisso che viene realizzato dagli studenti in un normale Liceo).

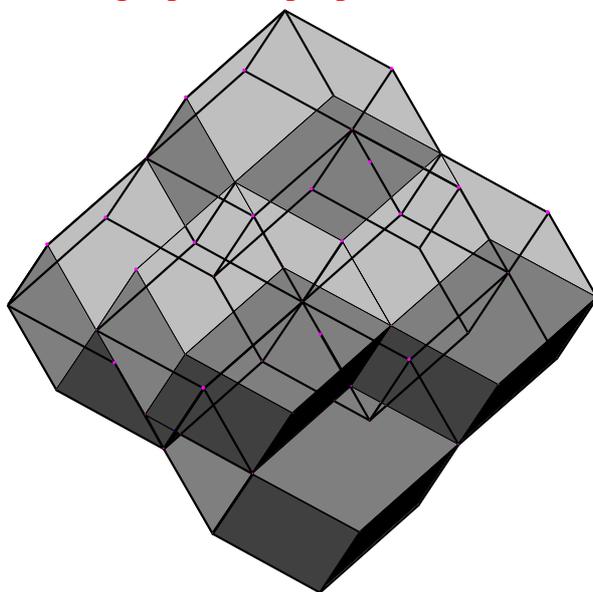


Per qualche motivo sconosciuto, traducendo il disegno da Cabri a Word, non mi riesce possibile mostrare i colori delle facce in trasparenza che sovrapponendosi, mentre D^3 ruota, producono colori differenti.

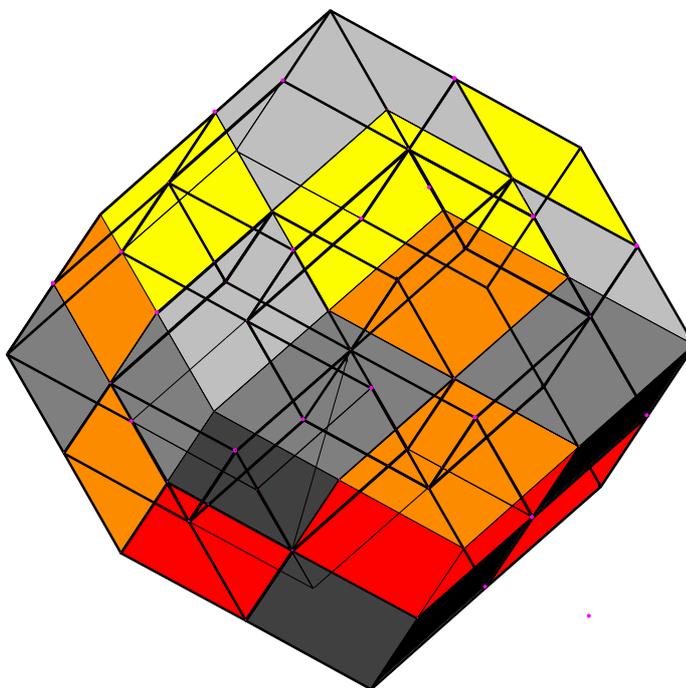
Così anche questa proprietà può essere unicamente immaginata.

Dandoci l'appuntamento ad un articolo nel prossimo numero di Alice dove verranno precisati alcuni teoremi trasportandoli anche in dimensione qualsiasi, aggiungo soltanto due disegni e pochissime note conclusive che rimandano ai contenuti di alcune citazioni importanti che ho tenuto in particolare considerazione. Si tratta del pensiero di grandi matematici e di grandi pedagogisti che si sono occupati molto attivamente di didattica.

Due disegni per una proprietà interessante



Aggiungendo otto Cc^3 ai sei D^3 si ottiene un D^3 di spigolo doppio.



Alcune considerazioni conclusive

- In generale alcune scoperte sarebbero state impossibili senza disporre di un DGS per verificarle.

- Risulta particolarmente utile collegare la geometria sintetica con quella analitica, l'analisi, l'analisi numerica, la probabilità, la teoria dei numeri, le varie dimensioni dello spazio e *il discreto con il continuo*.

- Chi legge deve spesso ricostruire le immagini per identificare alcune proprietà. Ma forse proprio questo è interessante: fa parte del rapporto attivo fra il testo e l'apprendimento. Negli argomenti presentati, nel rimandare molto spesso la comprensione alle sezioni e alle proiezioni, si mettono in gioco delle capacità che sono certamente abbastanza naturali, ma che debbono essere attivate ad un buon livello. È questo esercizio che si considera interessante.

- La maggioranza dei disegni di questo articolo e di quello che seguirà sono stati mostrati da me agli studenti del Corso di Didattica della Matematica, soffermandomi sugli accorgimenti importanti utili per realizzarli. Sareste stupiti dalla facilità con la quale la maggioranza degli studenti ha assolto il proprio compito, ideando delle soluzioni anche migliori di quelle proposte, realizzando in modo dinamico i poligoni e i poliedri nel piano e nello spazio, fissi o ruotanti o accompagnati dalle loro sezioni *pulsanti*.

- Buona parte degli studenti sembra considerare molto motivante la possibilità di realizzare alcuni disegni attraverso alcune soluzioni ideate in prima persona, di mettere in evidenza alcuni aspetti curandone i particolari, la grafica, la dimensione e gli spessori, il colore e in generale le componenti estetiche che assieme al movimento rendono viva una presentazione nella quale sia possibile riconoscere un proprio apporto personale.

Si tratta molto spesso di piccole scoperte che poche volte portano alla individuazione di proprietà importanti. Ma come già detto, questo è soltanto uno degli obiettivi che si vogliono raggiungere.

Infine, va detto che le valutazioni degli studenti del corso sono state ottime. Come breve conclusione e bilancio didattico, pensiamo di poterci accontentare del nostro tentativo di realizzare una condizione necessaria per un insegnamento pedagogicamente più efficace, che sta sia nello sviluppare negli studenti una maggiore fiducia in se stessi e alcune capacità importanti, sia nella ricerca di un miglioramento degli atteggiamenti nei riguardi della matematica e in generale dell'apprendimento.

Adesso passo la parola ai grandi matematici e ai grandi pedagogisti *sulle spalle dei quali veniamo trasportati*.

* *L'educazione non deve limitarsi a perpetuare da una generazione all'altra l'ordine esistente, deve invece elaborare modelli di vita nuovi e alternativi.*

Rousseau J.J., 1762, *Contratto sociale*.

* *L'induzione e l'analogia, Sono i principali mezzi per raggiungere la verità*

P. Simon de Laplace, *Saggio filosofico sulle probabilità*, Laterza 1951 (1814), p. 41)

* *Insegnare i dettagli significa portare confusione. Stabilire la relazione tra le cose, significa portare la conoscenza.*

Montessori M.

<http://fabriziobbb.blogspot.com/2009/08/maria-montessori.html>

* *le diverse parti del cervello umano funzionano a velocità differenti e gli oggetti vengono riconosciuti da una parte del cervello, mentre il moto viene rilevato da un'altra. Ciò significa che quando vediamo una persona in movimento, le due sezioni del cervello riconoscono separatamente moto e persona, mentre una terza parte unisce i due segnali... L'aspetto interessante è che le due zone del cervello funzionano a velocità sensibilmente diverse, e quella che riconosce il moto è molto più rapida. Immagino che l'origine di questa caratteristica sia sempre di carattere evolutivo: per un umano nella giungla è più importante riconoscere rapidamente se qualcuno si muove, piuttosto che riconoscere chi si muove - che sia una tigre, un leone o un serpente.*

M. F. Atiyah, *Siamo tutti matematici*, Di Renzo, 2007, p.13.

* *In effetti, devo ammettere che provo un senso di profondo disturbo quando alcuni colleghi usano troppi termini tecnici: sono stati educati a credere che ogni loro affermazione, debba essere precisa e corretta, come gli avvocati. Per quanto mi riguarda preferisco usare parole che siano patrimonio dell'intera comunità scientifica, e non necessariamente dei soli matematici. Se spiegassimo le nostre idee senza usare un'inutile quantità di gergo tecnico e di formalismi, anche Newton, Gauss e Abel potrebbero capirci. In fondo, erano ragazzi piuttosto svegli!*

M. F. Atiyah, *Siamo tutti matematici*, Di Renzo, 2007 p. 40.

* *la matematica, giustamente considerata non contiene soltanto la verità, ma la bellezza suprema...*

Russell B., 1964 (1918), *Lo studio della matematica*, in *Misticismo e logica e altri scritti*, Longanesi, Milano, p. 81.

* *Noi pensiamo in termini geometrici ... L'intuizione geometrica guida i*

nostri pensieri e suggerisce nuovi risultati. La geometria è sempre stata una sorgente fertile di nuove idee e da lei sono nate discipline matematiche complete ... usiamo la geometria ... come un modo di pensare. Noi dipendiamo in modo determinante dai nostri occhi e spunti importanti riusciamo a trasformarli in diagrammi geometrici ...

Engel A., 1972, L'insegnamento della probabilità nelle scuole medie, *L'ins. della Mat.*, vol. 3, n. 2-3-4, pp. 53-110.

** ... la concretezza delle immagini concorrono allo scopo di persuadere che la matematica non è un meccanismo a sé da sostituire al ragionamento, ma è la ragionevole base e prosecuzione dell'ordinario ragionamento.*

de Finetti B., 1959, *Matematica Logico Intuitiva*, Cremonese, p. XII.

** La nostra geometria si serve dell'intuizione spaziale, ma più che altro come di un potere magico per dar corpo e rappresentazione a concetti, situazioni, problemi, di carattere generalmente non per se stesso geometrico, ma statistico, economico ecc.; è insomma, per così dire, la dottrina dello schema mentale adatto per afferrare intuitivamente tutti i problemi pratici la cui impostazione scientifica richiede lo strumento matematico.*

de Finetti B., 1959, *Matematica logico intuitiva*, Cremonese, p. 256.

** Non esiste - si può dire - alcun problema che non ammetta, seppure non lo esiga, di essere prospettato in uno spazio a più dimensioni.*

de Finetti B., 1970, *Teoria delle probabilità*, Einaudi, p. 535.

** La mancanza della diretta intuizione visiva nell'andare oltre le tre dimensioni non è da tale punto di vista un ostacolo meno esteriore e contingente di quanto la mancanza di dita nell'estendere la definizione di numero oltre il dieci.*

de Finetti B., 1959, *Matematica logico intuitiva*, Cremonese, p. 261.

** Geometry is gradually coming back into school syllabus [17], but so far only 2-dimensional geometry. I would like to make a case for including some 3-dimensional geometry as well, because the latter is vital for describing the world throughout science, engineering and architecture. Higher-dimensional geometry also comprises a major part of modern research within mathematics itself. Also 3-dimensional geometry fosters both our intuitive understanding and our geometric imagination. It teaches us to see things in the round. It also trains us to see all sides of an argument simultaneously, as opposed to algebra and computing which emphasise thinking sequentially.*

Sir Zeeman C., 2005, *A supplement to The Mathematical Gazette*, The Mathematical Association [MA], March 2005.

** Il disegno deve contribuire al fine generale dell'insegnamento, che è*

quello di procurarsi idee chiare.

Pestalozzi J. Heinrich, in Silber, K., 1965, *Pestalozzi: The man and his work* 2e, Routledge and Kegan Paul, London.

** Chi segue una catena di sillogismi o passaggetti può venir condotto (come usava dire Federico Enriques) ad ammettere obtorto collo una verità senza vederne il perché. Ma proprio vederne il perché è invece, a mio avviso l'essenziale ... "*

de Finetti B., Teoria delle Probabilità, Einaudi 1970, p. 584

** Non mi sembra che il linguaggio, scritto o parlato, abbiano alcun ruolo nel meccanismo del mio pensiero. Le entità psichiche che sembrano servire da elementi del pensiero sono piuttosto alcuni segni e immagini più o meno chiari che possono essere riprodotti e combinati "volontariamente". Ovviamente, sussiste una relazione di un qualche tipo fra questi elementi e i concetti logici pertinenti. E' anche chiaro come alla base del gioco piuttosto vago di tali elementi si trovi il desiderio di arrivare infine a concetti logicamente connessi tra loro. Ma da un punto di vista psicologico, questo gioco combinatorio sembra essere il tratto caratteristico del pensiero produttivo - prima che ci sia alcuna connessione con la costruzione logica in parole o in altri segni che si possano comunicare ad altri. Gli elementi sopra menzionati sono, nel mio caso, di tipo visivo, e a volte muscolare. ...*

A. Einstein, In **Hadamard J.**, 1993 (1945), *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*. Raffaello Cortina Editore, p. 129.



Maria Montessori

<http://www.siamodonne.it/siamodonne/2010/05/maria-montessori-pedagogista-singolare/>

Bibliografia

- [1] Amaldi U., 1925, Sulla teoria della equivalenza. *Questioni riguardanti le Matematiche elementari, raccolte e coordinate da F. Enriques*, Bologna, Zanichelli, Parte I: Critica dei Principii, Vol. II, pp. 1-59 (cit. 49).
- [2] AA.VV., 1952, *The Creative Process*, University of California, The New American Library.
- [3] Accascina G., Barra M., Bernardi C., Menghini M., 2006, Movimento, percezione e dimostrazione, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 29 A-B, n. 4, pp. 313-346.
- [4] Accascina G., Rogora E. (a cura di), 2009, *Seminari di geometri dinamica*, Edizioni Nuova Cultura, Roma.
- [5] Arzarello F., Olivero F. Paola D., Robutti O., 2002, A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt für Did. der Math.*, v. 43, n. 3, pp. 66-72.
- [6] Atiyah M. F., 2007, *Siamo tutti matematici*, Di Renzo.
- [7] Barra M., 1975, The cycloid - A didactic Experience - A new proof, *Educational Studies in Mathematics*, 6, pp. 93-98.⁵
- [8] Barra M., 1982, Alcune considerazioni didattiche sulle motivazioni allo studio della matematica nella scuola secondaria e un argomento interdisciplinare: problemi di minimo in urbanistica, in natura ed in architettura, in *L'Educazione Matematica*, supplemento III, Atti del convegno: *Dalle frasi aperte alle equazioni e disequazioni algebriche*, pp. 76-122, 1982, e in *Atti della XXXIV Rencontre Internationale della CIEAEM*, Orleans, 1982.
- [9] Barra M., 1990, Mathématiques dans la vie, *PLOT* (rivista dell'Association pour le Développement de l'Enseignement et de la Culture Mathématique), n. 50, mars, pp. 5-25.
- [10] Barra M., 1990, Savoir prouver, *PLOT* (rivista dell'Association pour le Développement de l'Enseignement et de la Culture Mathématique), mars, pp. 29-32.
- [11] Barra M., 1994, Being able to see in d-Dimensional Spaces, *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*, Modena 15-19 febbraio.
- [12] Barra M., 1995, "Formule e teoremi per induzione naturale" e "Fusionismo globale", in Jannamorelli B. (ed), *Lingue e linguaggi*

⁵ È stato uno degli argomenti delle *Esposizioni di matematica*. Vedi [32] pp. 228-237. Contiene una dimostrazione dinamica *ante litteram*.

- nella pratica didattica*, Atti del II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica: Lingue e linguaggi della matematica, Sulmona 30 marzo-1 aprile 1995, Ed. Qualevita, pp. 165-192.
- [13] Barra M., 1995, Random images on mental images, nel libro "*Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*", Edited by R. Sutherland, J. Mason, Series F: Computer and Systems Sciences Vol.138, Springer in cooperation with NATO Scientific Affairs Division, pp. 263-277.
- [14] Barra M., 1995, Insegnamento della Geometria attraverso l'*analogia* e l'*induzione*: spazi n-dimensionali per una proposta di *fusionismo*, relazione di un gruppo di lavoro sul tema: "L'Insegnamento della Geometria". Atti del XVII convegno UMI-CIIM (Latina, 27-29 ottobre 94), *Notiziario della Unione Matematica Italiana*, agosto-settembre, supplemento al n. 9, pp. 196-203.
- [15] Barra M., 1997, Cabri e l'ipercubo, geometria e fusionismo, il manifesto di un sognatore, e un omaggio ad un innovatore, Convegno nazionale "Geometria - Tradizione e rinnovamento", "*CABRIRRSAE*" *Bollettino degli utilizzatori di Cabri-Géomètre*, sett, n.13, pp. 11-22.
- [16] Barra M., 2000, Relationship between probability and other languages used in the sciences: the Pythagorean "Aritmo-geometry" expanded to d-dimensions and in the continuum and the discrete spaces. A didactic proposal, Poster Presentation and exposition as a Coordinator in the Discussion Group "*Stochastical thinking, learning and teaching*", Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Hiroscima, p. (1) 199, July 23-27, 2000.
- [17] Barra M., 2001, Ipersolidi e altri argomenti, *Progetto Alice*, N. 5, Vol. 2, Ed. Pagine, pp. 191-246.
- [18] Barra M., 2003, The importance of the use of didactic, new technological materials in mathematics classrooms and how this "participating environment" can improve mathematical learning and teacher's practice, *Acts of the 20th Panhellenic Conference on Mathematics Education, organized from the Hellenic Mathematical Society*, November 7-9, 2003, pp. 649-659.
- [19] Barra M., 2006, Avviamento alla dimostrazione e all'uso di simboli attraverso termini concreti. Trasformazioni dei poliedri platonici in poliedri archimedeei, *Progetto Alice*, N. 20, Vol. 7, Ed. Pagine, pp. 209 – 240.

- [20] Barra M., Giammei F., Laganà G. A., Nava F., 2007, Attività preliminare svolta nel Laboratorio "Saper ultravedere" nello spazio, inserito nel Progetto Nazionale *Lauree Scientifiche*, *Progetto Alice*, N. 23, Vol. 8, Ed. Pagine, pp. 185–199.
- [21] Barra M., Giammei F., Laganà G. A., Nava F., 2007, Molte proprietà semplici individuate e dimostrate dagli studenti attraverso ragionamenti concreti simili a quelli naturali. Scelta e uso dei simboli. Sviluppo dell'autostima degli studenti, *Progetto Alice*, N. 23, Vol. 8, Ed. Pagine, pp. 201–244.
- [22] Barra M., 2007, Innovative aspects of dynamic geometry software, *La matematica e la sua didattica*, Anno 21, n. 1, pp. 81-86.
- [23] Barra M., 2008, Matematica e software di geometria dinamica, *Progetto Alice*, N. 25, Vol. 9, Ed. Pagine, pp. 193–233.
- [24] Barra M., 2008, Sintesi dei risultati più importanti di Bruno de Finetti e delle sue posizioni scientifiche e didattiche. Alcuni ricordi personali, *Progetto Alice*, N. 26, Vol. 9, Ed. Pagine, pp. 65–116.
- [25] Barra M., 2008, Matematica e software di geometria dinamica seguendo le indicazioni scientifiche e didattiche di Bruno de Finetti, *Progetto Alice*, N. 26, Vol. 9, Ed. Pagine, pp. 191–230.
- [26] Barra M., 2009, Manipulation of virtual objects for the development of connections between geometry and probability as well as between the various dimensions of space. *Proceedings of Gordon's Bay Delta '09, 7th Southern Right Delta (ΣΡΔ'09) Conference On The Teaching and Learning of Undergraduate Mathematics and Statistics, Mathematics in a dynamic environment*, pp. 10-25.
- [27] Barra M., 2010, Tetraedri fattoriali $T^d!(s)$, *Progetto Alice*, N. 32, Vol. 11, Ed. Pagine, pp. 311-338.
- [28] Barra M., 2010, Problemi delle rivoluzioni in atto e ricerca di soluzioni. Importanza sociale e aspetti didattici dei Dynamic Geometry Software (DGS). Sviluppo della creatività. Il pensiero di alcuni grandi maestri. Il *Fusionismo olistico*. Pubblicato su *Education 2.0*:
<http://www.educationduepuntozero.it/speciali/pdf/specialemarzo11.pdf>
http://www.treccani.it/scuola/dossier/2011/informatica_scuola/barra.pdf
- [29] Barra M., 2011, A Geometrical Way to Sum Powers by Means of Tetrahedrons and Eulerian Numbers, *Cornell University Library*, <http://arxiv.org/abs/1103.4288>
- [30] Butterworth B., 1999, *Intelligenza matematica*, Ed. RCS Libri, S.p.a., Milano.
- [31] Berzolari L., Vivanti G., Gigli D. (ed.), "Enciclopedia della Matemati-

- che Elementari e Complementi*”, V. II, parte 1^a, Hoepli, 1937, Nuovo editore: Pagine, 2003.
- [32] Castelnuovo E., Barra M., 2000 (1976), *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino, Tradotto in: *La mathématique dans la réalité*, CEDIC Ed., 1980, e Nathan Ed., 1986.
- [33] Catastini L., 1990, *Il pensiero allo specchio*, La Nuova Italia, Firenze.
- [34] Coxeter H.S.M., 1963 (1948), *Regular Polytopes*, The Macmillan, N.Y.
- [35] Cundy H. M., Rollett A. P., 1972 (1961), *I modelli matematici*, Feltrinelli.
- [36] Curry, H. B. and I. J. Schoenberg, 1966, On Polya frequency functions IV: The fundamental spline functions and their limits, *J. Analyse Math.* 17, pp. 71–107.
- [37] Davis D., 1993, Visual Theorems, *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 333-344.
- [38] de Finetti B., 1959, *Matematica logico intuitiva*, Cremonese.
- [39] de Finetti B., 1967, *Il saper vedere in matematica*, Loescher.
- [40] de Finetti B., 1970, *Teoria delle probabilità*, Einaudi,
- [41] de Finetti B., 1974, Contro la “Matematica per deficienti”, *Periodico di Matematiche*, Vol. 50, n. 1-2 Maggio, pp. 95-123.
- [42] Dedò M., 1999, *Forme. Simmetria e topologia*, Decibel, Zanichelli.
- [43] Gario P., 1979, *L'immagine geometrica del mondo. Storia dei poliedri*, Stampatori didattica.
- [44] Fichera G., Alcuni ricordi (Lettura registrata alla Discoteca di Stato il 22/V/1972).
- [45] Florenskij P. A., 1995, *Lo spazio e il tempo nell'arte*, a cura di N. Mislser, Adelphi.
- [46] Furinghetti F., Paola D., 2003, To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: a case study, *Proceedings of PME 27*, Vol. 2, pp. 397-404.
- [47] Hadamard J., 1993 (1945), *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, Raffaello Cortina.
- [48] Hardy, G. H., 1992, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press.
- [49] Hilbert D., Cohn Vossen S., 1974, *Geometria intuitiva*, Boringhieri.
- [50] Holden A., Singer P., 1962, *I cristalli*, Einaudi, Torino.
- [51] Kleine F., 2004 (1939), *Elementary mathematics from an advanced standpoint*, Geometry, Dover Publications.

- [52] Laborde C., 2000, Dynamic Geometry environments as a source of rich learning contexts for complex activity of proving, *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp. 151-161.
- [53] Lakatos I., 1979 (1976), *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta scientifica*, Feltrinelli, Milano.
- [54] Lakatos I., 1985, *Matematica, scienza ed epistemologia. Scritti filosofici*. Il Saggiatore, Milano.
- [55] Lombardo Radice L., 1976, *Il giocattolo più grande*, Editori Riuniti
- [56] Mariotti A., 2002, Technological advances in mathematics learning, in *Handbook of International Research in Mathematics Education*, pp. 695-723, Lawrence Erlbaum, Mahwah, New York.
- [57] Neamtu M., 2001, Bivariate Simplex B-Splines: A New Paradigm, *Proceeding SCCG '01 Proceedings of the 17th Spring conference on Computer graphics*, IEEE Computer Society Washington, DC, USA.
- [58] Paivio, A., 1979, *Imagery and verbal Processes*, Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers.
- [59] Pestalozzi E., in Silber, K. 1965, *Pestalozzi: The man and his work 2e*, Routledge and Kegan Paul, London.
- [60] Phillips F. C., 1963, *An Introduction to Crystallography*, Glasgow.
- [61] Poincaré H., 1902, Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques, in *Compte Rendu du deuxième Congrès International des Mathématiciens* (Paris, 1900), Gauthier-Villars, Paris.
- [62] Poincaré H., 1913, Conferenza tenuta alla Société de Psychologie di Parigi. Mathematical Creation, in *The Foundation of Science*, The Science Press, New York, e in *Science et méthode*, 1908, Flammarion, Paris, poi in *Oeuvres*, vol. VI, tr. It. di C. Milanese, in *Opere epistemologiche*, vol.II, pp. 35-45.
- [63] Polya G., 1954, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton Un. Press.
- [64] Polya G., 1967, *Come risolvere i problemi di matematica*, e 1971, *La scoperta matematica*, 2 voll., Feltrinelli, Milano.
- [65] Rousseau J.J., 1762, *Contratto sociale*.
- [66] Russell B., 1964, *Lo studio della matematica*, in *Misticismo e logica*, Longanesi.
- [67] Souriau P., *Théorie de l'invention*, Hachette, 1881.
- [68] Thomson D'Arcy W., 1969 (1961), "Crescita e forma", Boringhieri.
- [69] Weyl H., 1975, "La simmetria", Feltrinelli, Milano.
- [70] Wertheimer M., 1965, *Il pensiero produttivo*, Giunti-Barbera, Firenze.