Il diagramma d'argilla, geometrico risolvente a modulo quadrato, che governava l'intera arte algebrica degli antichi scribi. Un paradigma che ha aperto le porte alla Cultura Matematica delle Civiltà arcaiche.

Aldo Bonet*

Sunto: Da uno studio iniziato nel 1989, si percorre una strada conclusiva che tende a dimostrare l'esistenza di un diagramma d'argilla a modulo quadrato, che governava l'intera arte algebrica delle Civiltà arcaiche, seguendo l'analisi dello studio dei problemi e delle identità notevoli rinvenuti sulle tavolette cuneiformi e connettendoli con le matematiche delle Civiltà potamiche e talassiche.

Abstract: A study begun in 1989, you take a conclusive way that tends to prove the existence of a plot of clay to form the square, which ruled the whole art of algebraic archaic civilization, following the analysis of the study of the problems and the identities found on major cuneiform tablets and connect with the mathematics of Civilization Potamia and Thalasso.

parole chiavi: introduzione, forma standard, il criterio di scivolamento o rotazione, la tassellatura con mattoni, due osservazioni interessanti, due ipotesi conclusive, i due tesori della geometria, dall'Oriente a Pitagora, da Pitagora a Euclide.

* aldo@storiadellamatematica.it

1. Introduzione

Nel dicembre del 1989, sulla Rivista L'Educazione Matematica, mi fu pubblicato un mio lavoro che formulava un'ipotesi di un probabile e unico metodo algebrico – geometrico che, a mio parere, consentiva ai babilonesi la visualizzazione delle identità notevoli e la conseguente risoluzione dei loro problemi rinvenuti sulle tavolette cuneiformi. **(1)**
Un lavoro ipotetico che si basava sulla possibile ricostruzione geometrica del principio della semisomma e della semidifferenza **(2)** in uso presso i babilonesi, nato probabilmente dall'incrocio di due cordicelle di allineamento poste sopra una sezione a modulo quadrato e di seguito perfezionato probabilmente dall'osservazione di due cerchi concentrici inscritti nei loro rispettivi quadrati e che ripropongo qui in una forma geometrica più in stile con la geometria mesopotamica. **(3) (vedere allegato 1)**
Un principio che poi ho conseguentemente applicato ad un diagramma che si è spontaneamente concretizzato con un'apertura a compasso, consentendomi di procedere facilmente, sulla base della medesima logica deduttiva, da una forma iniziale, monodimensionale o lineare, a quella consecutiva, bidimensionale e tridimensionale, permettendomi così di realizzare un metodo generale di risoluzione e unico per i problemi di 1°, 2° e 3° grado, che avevo ipotizzato su due possibili strade distinte, ma fra loro equivalenti:

- Una, ampiamente spiegata nella parte iniziale e in forma prevalente nella pubblicazione sopracitata del 1989, percorsa con lo sviluppo, mediante apertura a compasso, di un diagramma triangolare retto o prismatico risolvente, che prevede la sovrapposizione delle superfici o dei volumi, realizzato per giungere a rafforzare la nota costruzione geometrica nello spazio ipotizzata dallo Storico Matematico S.J. Lurje **(4)**.
- L'altra, introdotta nella stessa pubblicazione sopracitata **(5)**, percorsa con lo sviluppo mediante un'apertura dimensionale più geometrico - elementare (lineare, quadrata, cubica), di

un diagramma **(6)** quadrangolare retto o cubico risolvente ed equivalente al precedente, che non prevede la sovrapposizione delle superfici o dei volumi ma che giunge esattamente alle stesse conclusioni se comparato con gli stessi problemi, visualizzando inoltre le stesse identità algebriche sfruttate dallo scriba e ravvisabili sui testi babilonesi. Due strade, solo apparentemente distinte, dove l'una, può rappresentare probabilmente l'evoluzione dell'altra, ma entrambe collegate.

Quest'ultima strada, già istintivamente intravista nel 1991, nella sua potenzialità, dal Professor Bruno Rizzi che mi esortò a intraprendere, è quella che con questo lavoro desidero approfondire e integrare per completezza conclusiva e chiarificatrice.

Riesamino le identità notevoli e i problemi noti nella letteratura algebrica babilonese, inserendo delle novità mediante nuove ipotesi e osservazioni più approfondite alle congetture già contenute nella pubblicazione sopracitata del 1989, elaborate inoltre alla luce delle recenti pubblicazioni in materia **(7).**

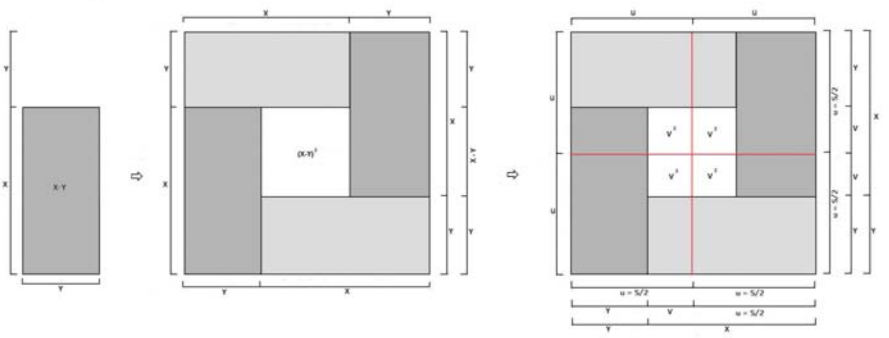
Analizzo ove necessario, con personali interpretazioni, la schematicità dei testi babilonesi, investigando sul senso logico delle terminologie usate dallo scriba e tradotte direttamente dagli specialisti dalle tavolette cuneiformi a contenuto matematico riferite ai problemi di 2° grado e le raffronto schematicamente col diagramma d'argilla quadratico risolvente a modulo quadrato, che si identifica con quello esposto nella mia pubblicazione precedentemente citata **(8)** e che, come avremo modo di vedere, in forma introduttiva nel presente articolo, risulterà alla base di una tecnica algebrica degli antichi scribi per la soluzione di molti problemi rinvenuti sulle tavolette cuneiformi e presente inoltre nelle arcaiche Civiltà: Cinese, Egizia e Indiana, **(9)** per la conseguente dimostrazione empirica, da me ipotizzata con l'ausilio di mattoni, dell'identità notevole ed equivalente al noto "Teorema di Pitagora" a dimostrazione, che il noto "Teorema" non apparteneva a Pitagora ma molto probabilmente, ad un'unica e più vasta Civiltà Madre sopracitata. Infine, come vedremo, lo stesso

diagramma contiene le note proposizioni algebriche estrapolate dai Pitagorici e sopravvissute sia negli Elementi di Euclide, sia nella matematica vedica indiana, sia nella cultura matematica islamica, mediante i diagrammi di Al-Khuwarizmi **(vedere allegato 2).** La tecnica algebrica degli antichi scribi, la ritroviamo ancora con la geometria pratica per gli artigiani di Abū l'Wafā' al-Būzǧānī **(10)** Probabilmente l'ultima testimonianza rimastaci di questo straordinario diagramma, sopravvive in un pavimento nel famoso palazzo della simmetria, d'arte moresca conosciuto come, l'Alhambra di Granada**. (Vedere allegato 3)**
Il diagramma d'argilla, quadratico risolvente a modulo quadrato, prenderà realisticamente forma e corpo dall'analisi di problemi presenti nell'antica tavoletta babilonese contrassegnata come: AO 8862 **(11)**.

2. Forma standard o "normale"

Ci sono molti esempi di problemi quadratici più complessi **(12)** che i babilonesi riconducevano sempre ad una forma normale, come la chiamava Otto Neugebauer **(13)**
Il problema esemplificativo della forma standard si può tradurre col sistema:
$XY = b$; $X + Y = S$.
Una forma normale fatta di somma (o differenza) e prodotto a cui probabilmente, secondo la mia congettura, i babilonesi ricollegavano e basavano l'algoritmo dei loro problemi quadratici con la visualizzazione del diagramma geometrico seguente:

FASE 1 FASE 2 FASE 3



PROBLEMA: $X + Y = S$; $X \bullet Y = b$

IDENTITA': $(X+Y)^2 - 4XY = (X-Y)^2$

$4U^2 = 4XY + 4V^2$

$X = S/2 + V$

$Y = S/2 - V$

Fig. 1

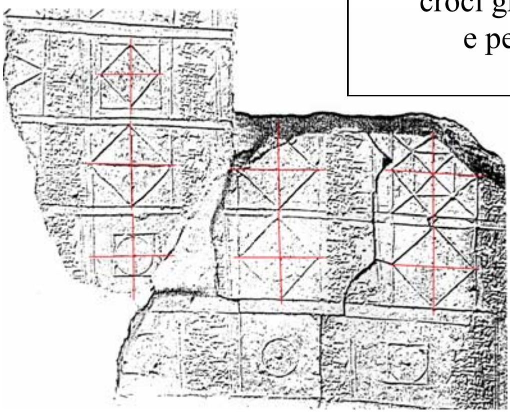
Un diagramma, che si sviluppa fondamentalmente in tre probabili e consuete tappe (o fasi), che si possono riassumere nell'usuale procedimento operativo e necessarie alla risoluzione dei noti problemi babilonesi di 2° grado.

Fase 1. In questa fase si procede rendendo il problema omogeneo e razionale (quindi, nel nostro caso, visualizzando la superficie rettangolare che geometricamente lo interpreta) per farlo entrare, come un corpo componente, nel diagramma che andrà successivamente costruito o imbastito nella fase 2.

Fase2. In questa fase, si procede al componimento del diagramma in argomento, con una forma simmetrica particolare, conosciuta nella nostra architettura come:"figura a modulo quadrato". Una sorta di composizione fatta con quattro superfici rettangolari identiche e preliminarmente quadruplicate col problema dato, incrociando perpendicolarmente, sia le superfici rettangolari, sia quindi, i medesimi e rispettivi lati di ognuna, mediante una disposizione contigua e alternata,

“verticale–orizzontale” e sequenziale, dove la lunghezza esterna di ognuna si prolunga con la larghezza esterna dell’altra superficie consecutiva, mentre la larghezza interna di ognuna va a congiungersi con la lunghezza interna dell’altra consecutiva, imbastendo così un diagramma che mette in contatto i lati alterni dei singoli rettangoli, facendo in modo che si tengono reciprocamente fra loro **(14)**, concatenandosi così con un intreccio incrociato quadrangolare retto, in ordine circolare e con un senso, a piacere, orario o antiorario.
Un diagramma di straordinaria simmetria, **(15)** probabilmente ricavato e osservato, da qualche tecnico-artigiano babilonese (o sumero), nell’intento di studiare nuovi intrecci a mosaico o modelli in scala ridotta di costruzioni edili o semplici intrecci scaturiti da una posatura degli innumerevoli mattoni prodotti per le loro costruzioni urbane fortificate. Non ci sono documenti espliciti in proposito, ma gli esempi qui esposti, possono risultare utili a far intravvedere già nell’arte figurativa sumerica, una sensibile presa di coscienza verso questa forma geometrica, che avrebbe rievocato in una mente creativa, quel riflesso condizionato che sarebbe sbocciato facilmente verso un’immagine geometrica concretamente espressiva e imbastita, a modulo quadrato, mediante quattro mattoni o formelle rettangolari d’argilla **(16).**
D’altra parte, la semplice costruzione a secco, di un modellino tridimensionale di una torre, per una cinta muraria, a base quadrata e cava nel suo interno, eretta con quattro mattoni rettangolari uguali per ogni strato, nel garantire stabilità e resistenza di legatura negli angoli (concetti costruttivi ben noti agli antichi babilonesi), richiede obbligatoriamente una posatura a sezione geometrica a modulo quadrato e sfalsata tra i vari strati, in modo che i giunti non siano uno sull’altro. Inoltre, anche una pavimentazione con mattoni rettangolari, disposta a quadrati concentrici, porta ad avere, nella posa centrale, una figura obbligatoria a modulo quadrato, identica al diagramma. Ritroviamo sezioni a modulo quadrato anche nelle prime costruzioni cinesi in mattoni risalenti al V secolo a.C. **(Vedere allegati: 4,.5, 6, 7, 8, 9, 10)**

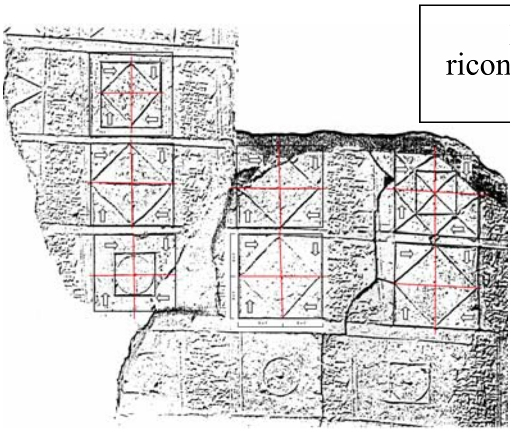
Fase 3. In quest'ultima fase si inserisce il principio della semisomma e della semidifferenza, posizionando semplicemente sul diagramma imbastito, la croce simmetrica, che lo fraziona in quattro parti uguali.
Una croce, scaturita probabilmente in modo fortuito, incrociando delle corde di allineamento, su una sezione geometrica a modulo quadrato, in fase di operazioni o progettazioni edili, ma che si ritrova o si intravvede spesso, come elemento appartenente ad uno stile grafico geometrico, direi famigliare alla stessa geometria matematica babilonese, riscontrabile sulla tavoletta B.M.15285 **(17)** del 1800 a.C. in cui si propongono dei problemi sul quadrato;



croci grafiche in posizione simmetrica e perpendicolare ai lati delle figure geometriche babilonesi

Fig. 2

una tavoletta che sarà inoltre, di supporto grafico correlativo con la matematica contenuta nei testi delle tavolette cuneiformi appartenenti allo stesso periodo e tradotte dagli specialisti.
La fase 3 di fig. 1 (o di fig. 8) correlandola con la stessa tavoletta sopracitata, la possiamo potenzialmente intravvedere con i problemi esposti e ipoteticamente riconducibili al supposto caso limite:"X = Y", in un linguaggio geometrico babilonese che risulterebbe facilmente comparabile ed eloquente.



problemi geometrici babilonesi
riconducibili al supposto caso limite
X = Y

Fig. 3

Questa semplice croce, posta centralmente in modo simmetrico e perpendicolare ai lati del diagramma, visualizza sorprendentemente, sulla base del principio della semisomma e della semidifferenza, una regola unica di risoluzione per i problemi connessi con le superfici, ma soprattutto estensibile e valida in generale per la risoluzione dei problemi di 1°, 2° e 3° grado.
La croce di simmetria, (vedere fig. 1) in quell'esatta e perpendicolare posizione baricentrica al diagramma, individua automaticamente, in parti uguali e simmetriche, i quattro rispettivi quadrati della semisomma, $4[(X+Y)/2]^2$ e della semidifferenza $4[(X-Y)/2]^2$ e coincide sempre, come vedremo, quale linea di frazionamento (quello che fraziona il diagramma in quattro parti uguali) esplicata nella terminologia dello scriba e tradotta dagli specialisti col termini: "Tu frazionerai o tu dividi", che compare nei testi matematici rinvenuti nelle tavolette cuneiformi.
Questa semplice applicazione della croce simmetrica sul diagramma, ha prodotto probabilmente, un inaspettato e sorprendente strumento matematico algoritmico dotato di notevole potenzialità, unicità e polivalenza; paragonabile, per importanza, con l'altro strumento matematico in uso presso i

Babilonesi cioè: l'abaco, con la sola differenza, che il diagramma veniva usato per visualizzare le identità e i procedimenti di risoluzione dei problemi anziché per effettuare le pure e semplici operazioni matematiche.
Le fasi 1 e 2 di fig. 2 sono in buona parte preliminari o di preparazione al problema, allo scopo di giungere ad imbastire il diagramma con la quadruplicazione del problema dato, onde poter posizionare in punti noti ,sullo stesso, la croce simmetrica che lo fraziona.
La fase 3 è quella che, con l'applicazione del principio in argomento, mediante la croce simmetrica, sul diagramma, entra dritta al cuore del problema e che individua, prevalentemente, in ogni quarta parte dello stesso, nonché in quella immediatamente aderente o confinante, i necessari passaggi algebrici o quelli fondamentali rimanenti, per giungere alle grandezze lineari necessarie ed esplicate nella terminologia dello scriba col termine: "equilaterale", quindi alla soluzione o alle soluzioni desiderate, sfruttando l'identità che compare visualizzata sul diagramma **(18)**:

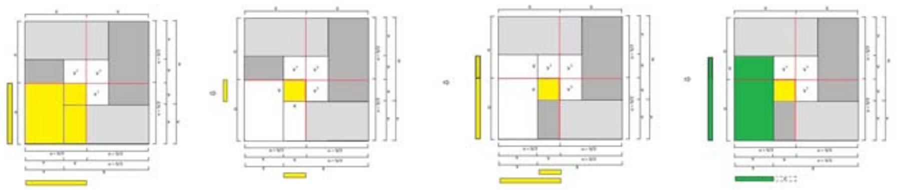


Fig. 4

$[(X + Y)/2]^2 - XY = [(X - Y)/2]^2$

Con: $X = U+V$; $Y = U-V$; **(19)** $U = S/2$; $V^2 = (S/2)^2 - b$

Notare come la superficie rettangolare, XY, in ogni quarta parte del diagramma, risulta facilmente individuata e computata con la forma gnomonica equivalente che, aggiunta al quadratino della semidifferenza, visualizza il completamento del quadrato della semisomma.

Il diagramma, con le sue fasi, di fig. 1 e fig 4, rappresenta un paradigma di base (o standard) per i problemi di 2° grado, intorno e all'interno del quale gravitano, tutti gli altri di ugual grado (o anche di grado superiore), ma soltanto più elaborati.
Queste fasi, visualizzate geometricamente, potevano essere, sia incise sulle tavolette d'argilla, sia (forse più facilmente e frequentemente) concretizzate con la realizzazione preliminare di vari pezzetti o frammenti geometrici d'argilla: quadrati, rettangoli, triangoli ecc. per il diagramma bidimensionale; cubi, parallelepipedi, prismi, ecc. per lo stesso diagramma ma sviluppato alla terza dimensione, componendo così a mosaico questa probabile tassellatura, sia nel piano, sia nello spazio, di un diagramma rispettivamente, quadratico o cubico, risolvente. **(20)**
Molti problemi, sono stati poi elaborati e impostati dai babilonesi, dalla forma normale di base a modulo quadrato **(21)**, a cui si riconducevano, in crescenti gradi di difficoltà, con varie combinazioni geometrico - numeriche ma anche, di "grado dimensionale (o esponenziale)" diverso. **(22)**
Non dobbiamo dimenticare, che i babilonesi si sono dimostrati nella pratica, degli abili artigiani e costruttori edili, nonché dei veri contabili e questa tecnica algebrica di tassellatura a frammenti geometrici d'argilla, pur empirica e rudimentale, appare più collegata ad un programma di studio indirizzato agli scribi per diventare, nell'organizzazione statale, dei buoni e necessari tecnici specializzati nelle arti e nei mestieri e non finalizzata alla sola ricreazione dello spirito. Quindi, una tecnica ausiliaria ideale per preparare lo scriba, ad una maggiore confidenza con progettazioni tecniche, artigianali e artistiche nonché al computo del ragioniere.
Riassumendo, il diagramma geometrico risolvente si può suddividere in:

1) Diagramma lineare risolvente, che coincide con la dimostrazione del principio della semisomma e della semidifferenza (Allegato 1) e che raggruppa tutti i problemi di 1° grado.

2) Diagramma quadratico risolvente che raggruppa tutti i problemi di 2° grado (fig. 1 e fig.4) (oggetto principale del presente lavoro).
3) Diagramma cubico risolvente che raggruppa tutti i problemi di 3° grado. (Aldo Bonet L'Educazione Matematica, da pag 205 a pag. 212, del 3/12/1989)

La soluzione di un problema quadratico, cubico o di grado superiore, consisteva quindi nel ridurlo gradualmente al diagramma inferiore precedente o ad un diagramma inferiore noto, che permetteva di giungere fino al diagramma lineare risolvente di base e che coincideva quindi, con la soluzione più semplice per le due grandezze incognite, le quali si configuravano nella condizione necessaria e sufficiente, solo quando era possibile ottenere a fianco della loro somma, anche la loro differenza o viceversa; **(23)** l'algoritmo era di conseguenza basato su un criterio a scatola, di chiusura dimensionale:“ Cubico, quadratico e lineare”.

Nella fase 2 di fig. 1, osservando bene il diagramma quadratico risolvente, si può estrapolare e visualizzare l'identità algebrica: (A) $(X+Y)^2 - (X-Y)^2 = 4XY$; presente anche nella proposizione II.8 degli Elementi di Euclide, nonché rilevabile sul Plimpton 322 utilizzata dai babilonesi per giungere al loro equivalente “teorema di Pitagora”**(24)**

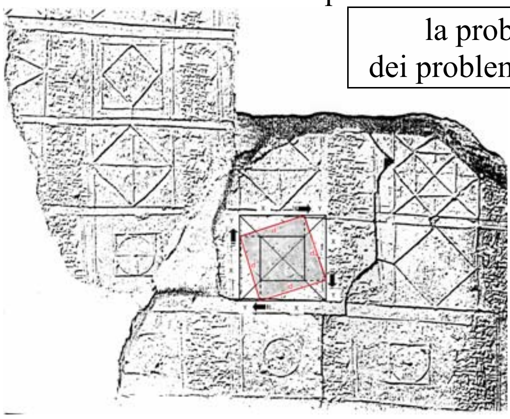
Nel Libro: Matematica i luoghi e i tempi vol 1 a cura di Bartocci e Odifreddi; a pag. 28 del capitolo: le origini, di Jens Høyrup leggiamo: ”e in più un altro degli enigmi matematici della tradizione laica (trovare i lati di due quadrati concentrici, quando l'area del nastro intermedio e la sua larghezza sono dati)”; un enigma matematico della tradizione laica, ma come si vede, svelato e risolto con l'identità (A) soprindicata e visualizzata sul diagramma babilonese.

Notare come l'intera area occupata o interessata dal diagramma quadratico risolvente è maggiore di quella normalmente interessata dal problema quadruplicato e internamente collocato: $(X+Y)^2 > 4XY$.

3. Il criterio di scivolamento o rotazione del quadrato sul diagramma, che stava probabilmente alla base dei problemi del scivolamento del palo o della canna.

Se sviluppiamo la stessa identità (A) sopracitata, nella conseguente:
(B) $(X+Y)^2/2 + (X-Y)^2/2 = 4XY/2 + 2(X-Y)^2/2$, la ritroviamo nuovamente a pag. 16 dello stesso capitolo di Jens Høyrup quando dice: "Una tavoletta ci presenta un esempio più sofisticato di sapere geometrico senza utilità pratica: il fatto che un trapezio viene diviso a metà da una linea parallela alle basi il cui quadrato è la media aritmetica fra i quadrati di esse":

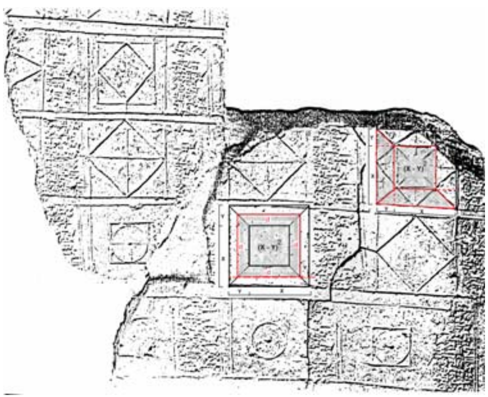
la probabile regola che stava alla base dei problemi del scivolamento della canna



rotazione o scivolamento del quadrato costruito sulla diagonale

Fig. 5

$(X + Y)^2 /2 + (X – Y)^2 /2 = 2XY + (X – Y)^2 = d^2$



superfici equivalenti al quadrato costruito sulla diagonale
vedere fig. 3 pag. 203 L'Educazione Matematica 3/12/1989

Fig. 6

Il quadrato medio aritmetico, non è altro che il quadrato costruito sulla "diagonale" del rettangolo equivalente al trapezio e contenuto nel diagramma quadratico risolvente, ovvero costruito sulla nostra più famigliare "ipotenusa".

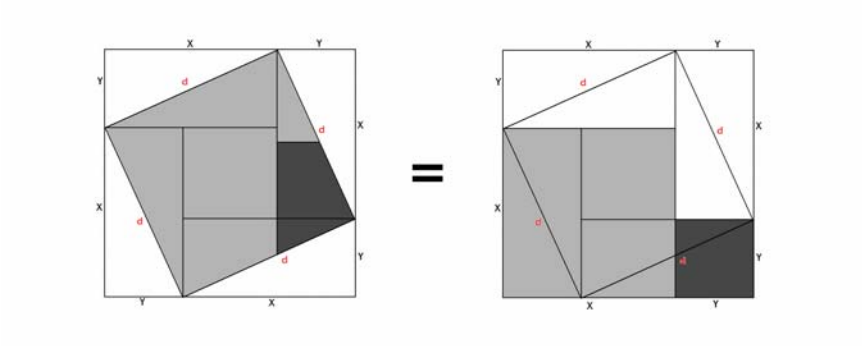
Se il quadrato (d^2),della fig. 5, lo facciamo ruotare o scivolare fino a posizionarsi, in modo concentrico e con i lati fra loro paralleli, s'interporrà matematicamente, per logica conseguenza,come in fig. 6, nella media aritmetica con i due rispettivi quadrati di riferimento, di area : $(X + Y)^2$; $(X - Y)^2$.; una tecnica geometrica facilmente visualizzabile nella sua dinamicità, mediante tre elementi geometrici d'argilla fra loro sovrapposti e di forma quadrata **(25);** un criterio empirico di base, che ha probabilmente ideato i noti problemi del scivolamento del palo o della canna.

4. La tassellatura con mattoni che ha generato una importante regola generale.

E' sufficiente, per una verifica algebrica, sviluppare il primo o il secondo membro dell'identità (B) sopracitata ed ottenere la somma dei quadrati costruiti sui “lati” del rettangolo, ovvero sui nostri e più famigliari “cateti”: $X^2 + Y^2$; per i babilonesi era più facile giungere alla suddetta verifica geometrica, mediante la loro tecnica di tassellatura con il loro diagramma quadratico risolvente, opportunamente impilato nelle varie fasi dimostrative con mattoni rettangolari,mezzi mattoni rettangolari o triangolari,mattoni quadrati, mezzi quadrati, gnomoni ecc. **(vedere allegato 11)**

Il criterio sopracitato,associato alla tecnica di tassellatura con mattoni ha generato probabilmente la seguente e importantissima regola contenuta nel diagramma:

REGOLA GENERALE BABILONESE DELLA RELAZIONE TRA I LATI E LA DIAGONALE DEL RETTANGOLO



ovvero dell’ equivalenza tra le superfici costruite sui lati e quella costruita sulla diagonale del rettangolo, verificabile col criterio della equicomposizione o equiscomposizione delle superfici

Fig. 7

(Notare la notevole analogia con la dimostrazione cinese per la medesima identità algebrico geometrica; consiglio di leggere il lavoro di Karine Chemla: “Matematica e cultura nella Cina antica” presente sul Libro “ la Matematica ” i luoghi e i tempi vol 1 a cura di Bartocci e Odifreddi Einaudi 2007 nonché Paolo Zellini in “Gnomon una indagine sul numero “ Adelphi edizioni 1999 pagg. 273, 274).

Questa è una regola generale (e non limitata a casi particolari) che ci fa ipotizzare due osservazioni interessanti:

5. Due osservazioni interessanti

1) Il “Teorema di Pitagora”; una scoperta originale delle Civiltà arcaiche, avvenuta con il loro diagramma

Il “Teorema di Pitagora” poteva essere stato così trovato indirettamente dai babilonesi probabilmente, almeno 1000 anni prima di Pitagora stesso **(26)**, tramite il diagramma quadratico risolvente, utilizzato per l’esclusiva ricerca delle soluzioni dei problemi di 2° grado, ma con una diversità algebrica più nella forma che nella sostanza, rispetto a quella di Pitagora storicamente a Lui attribuito e cioè: i “cateti” intesi così come noi li conosciamo, quali lati adiacenti all’angolo retto di un triangolo rettangolo, venivano elusi e interpretati dai babilonesi sempre e comunque come i lati del rettangolo di appartenenza, ovvero come le incognite di un problema di 2° grado da ricercare e quindi, come i lati di una superficie rettangolare anziché triangolare (Vedere Renè Taton in “Histoire Generale des sciences, La science Antique et Medievale “ Vol 1, 1957 pagg.118 e 119).

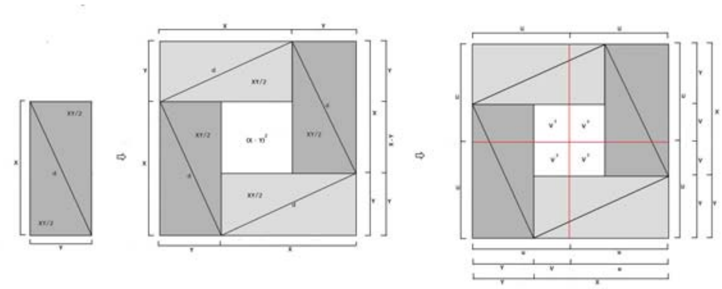
E’ interessante notare che anche gli indiani, nei Sulvasutra, conoscevano questa regola (ved. Carl B. Boyer in “Storia della Matematica“ pag. 243).

Un problema legato alla Regola Generale Babilonese e connessioni con le altre Civiltà.

Un problema emblematico è quello della tavoletta Db_2-146 di cui a pag. 98 del Libro, Storia dell’Algebra ,Silvio Maracchia,Liguori 2005 nonché a pag 257 del Libro di Jens Høyrup, Lengths, Widths, Surfaces, Springer 2002, che si costruisce con le fasi seguenti e dentro il solito diagramma quadratico risolvente.

Il problema,tradotto algebricamente, è il seguente: XY = 3/4 ; d = 5/4

FASE 1	FASE2	FASE 3



PROBLEMA: $XY = 3/4;\ d = 5/4$

IDENTITA’: $d^2 = 2XY + (X-Y)^2$

$d^2 - 2XY = (X-Y)^2$

$d^2 + 2XY = (X+Y)^2$

Fig. 8

Nella fase 1 si razionalizza il problema, per inserirlo nella fase 2.

Nella fase2 si compone il diagramma a modulo quadrato come indicato per il precedentemente problema “standard” di Fig.1, dove si compiono, una prima serie di passaggi algebrici preliminari, schematizzati con le identità visualizzate e perfettamente correlati con quelli dello scriba, che portano a conoscere la differenza dei lati del rettangolo, riducendo il problema a quello tipo “differenza e prodotto” risolto conclusivamente, nella fase 3 successiva.

Nella fase3 si inserisce il principio in argomento, posizionando sullo stesso diagramma in punti noti, la croce simmetrica che lo fraziona in quattro parti uguali, semplificando l’individuazione dei rimanenti passaggi algebrici e che porta lo scriba alla soluzione lineare conclusiva desiderata, così come indicati nella tavoletta. **(Vedere allegato 12)**

I calcoli mostrati dallo scriba per la verifica del problema, si possono perfettamente visualizzare con quanto abbiamo già verificato in precedenza, mediante lo stesso diagramma di cui alla regola fig.7, nonché in fig.9 e 10 che andremo successivamente a sviluppare.
Come conclusione a questo problema, è interessante osservare che le identità ravvisabili sul diagramma alla fig.8, sono le stesse elencate dall’anonimo esponente di una corrente matematica persiana del X secolo, autore di un manoscritto incluso nel Codice 952b del “Supplèment arabe” dell’allora Biblioteca imperiale di Parigi. Questo anonimo maestro non conosceva l’opera di Diofanto (250 d.C.), ma molto bene quella

di Euclide (300 a.C.). Le identità in argomento, che non si trovano negli Elementi, erano invece presenti e applicate nell'Aritmetica di Diofanto alla proposizione V,7. **(27)**

6. Mesopotamia e antica Cina, una stupefacente connessione.

Troviamo ancora, a testimonianza di una notevolissima e diretta influenza algebrico geometrica babilonese o di una tradizione comune per entrambe le civiltà, le stesse identità e lo stesso visibile diagramma quadratico risolvente composto a mosaico con l'uso equivalente di figure geometriche ritagliate con carta colorata, nello "gnomone degli Zhou", un documento dell'antica Cina risalente alla dinastia Han (206 a.C. -220 d.C.) dove la dimostrazione equivalente al "Teorema di Pitagora" è perfettamente identica. Joseph Needham,Scienza e Civiltà in Cina,Vol III parte I, Einaudi 1985,pag.28, 120,121,122,123,124,125.

Notevole è l'analogia tra lo studio geometrico cinese dei solidi presenti nei "Nove capitoli sui procedimenti matematici" risalente alla stessa dinastia Han e quello babilonese col diagramma cubico risolvente (vedere A. Bonet fig .4 pag .207 e fig. 6 pag. 209 L'Educazione Matematica. 1989, Karine Chemla: "Matematica e cultura nella Cina antica" presente sul Libro " la Matematica " i luoghi e i tempi vol 1 a cura di Bartocci e Odifreddi Einaudi 2007, Jöran Friberg, Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics – World Scientific 2007 – da pag. 202 a pag. 210)

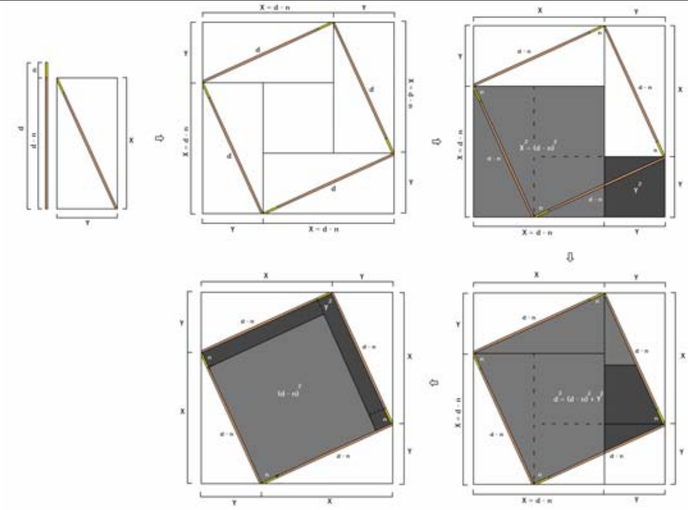
2) I problemi del scivolamento del palo o della canna delle Civiltà arcaiche, erano strettamente collegati al diagramma geometrico risolvente a modulo quadrato.

La ricerca di un sapere geometrico, come quello sopracitato, ha probabilmente,a mio parere, innescato e prodotto indirettamente sin dal periodo babilonese più antico, una regola generale rivelatasi valida per i triangoli rettangoli e perfettamente applicata con i problemi,noti come i problemi del scivolamento del palo o della canna e rinvenuti sulle tavolette BM 34568,12 (periodo selucida) e BM 85196,9 (antica matematica babilonese), **(28)** correlati, per similare dinamicità, tra il movimento di scivolamento della "canna" e quello per rotazione o di scivolamento del "quadrato" sopracitato costruito sulla diagonale, ovvero sul suo lato equilaterale che coincide con "l'ipotenusa pitagorica". A differenza del "teorema di Pitagora", per i babilonesi questa regola generale e presumibile che veniva applicata sempre in forma indiretta al triangolo rettangolo, in quanto legata e ancorata alle identità algebriche visualizzabili sul loro diagramma quadratico risolvente, svolto unicamente alla risoluzione dei problemi di 2° grado e quindi più collegato a superfici quadrate e rettangolari, dove di conseguenza condizionava i passaggi algebrici dello scriba che possiamo osservare, alquanto inusitati e schematici nel giungere alle soluzioni dei problemi e dove lo portavano a ripercorrere e a dilungarsi in passaggi algebrici ripetitivi laddove, non ce ne sarebbe stato bisogno. **(29)**

Difatti, servendoci del solito diagramma quadratico risolvente e costruendo internamente i problemi sopracitati (noti come i problemi del scivolamento del palo o della canna) per poi svilupparli nelle seguenti fasi, possiamo osservare:

PRIMA IPOTESI

FASE1 FASE2 FASE3



FASE 5 FASE 4

PROBLEMA: BM85196,9; $d^2 = (d-n)^2 + Y^2$

BM34568 n°12; $d = ?$; $n = 3$; $Y = 9$

IDENTITÀ: $d = 30$; $n = 6$; $Y = ?$

$d^2 = (d-n)^2 + 2n(d-n) + n^2$

$2nd = Y^2 + n^2$

Fig. 9

SECONDA IPOTESI EQUIVALENTE

FASE 1 FASE 2 FASE 3

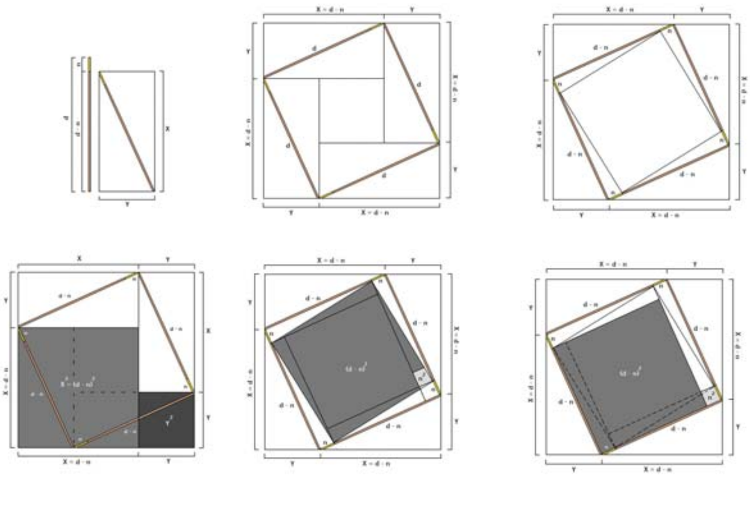


Fig. 10

FASE 6	FASE 5	FASE 4

IDENTITÀ: $d^2=(d-n)^2+n^2+2n(d-n)=(d-n)^2+Y^2=d^2$; $2nd - n^2 = Y^2$

Nella fase 1, si inserisce nel rettangolo “il palo di canna” del problema che coincide esattamente con la diagonale del rettangolo XY,come per il problema di Fig. 8..

Nella fase2,come per i problemi precedenti, si compone il diagramma con la superficie che contiene internamente la “canna” posta nella diagonale e si imbastisce a modulo quadrato.

Le fasi 4 e 5 di fig. 9 sono solo specifiche per visualizzare i passaggi del problema n°12 BM 34568 che contiene la variante: $d^2 = (d - n)^2 + Y^2$; quindi: $2\ nd = n^2 + Y^2$.; con n=3, Y=9 (vedere l’equivalente fig. 10)

La fase3 di fig.9, identica per entrambi i problemi, visualizza l’identità algebrica già vista col disegno di Fig.7 e come si può osservare, porta lo scriba a ripercorrere, per il problema n°12, una strada più lunga in quanto legata e condizionata dal solito diagramma quadratico risolvente,come in fase 5 di Fig.9.

Notevole è l'analogia del diagramma Babilonese nella fase3 di fig. 10 con il diagramma Cinese risalente al secondo millennio a:C. e presente nello Chou – Pei Suan –King,**(30),** nonché l'analogia con i problemi soprindicati, di uno stesso problema cinese presente sul libro Chiu-Chang Suan-Shu; questo spiega efficacemente la connessione di una medesima formula di risoluzione presente per problemi analoghi tra l'antica Cina e i Babilonesi e quindi, dell'esistenza di un identico criterio e diagramma tra le due antiche Civiltà. Lo stesso problema del scivolamento della canna lo troviamo anche nella Civiltà Egizia nel problema n° 24 del Papiro del Cairo (I sec. a.C.) **(31)**. Lo stesso diagramma e la stessa regola li troviamo nella tradizione Indiana e Islamica **(32)**. Si può dedurre, che chi conosceva il particolarissimo problema del scivolamento del palo o della canna, conosceva di conseguenza, il criterio del scivolamento del quadrato e quindi, il diagramma quadratico risolvente a modulo quadrato.

Nella equivalente fig. 10 alla fase 3, si può notare (solo a titolo di curiosità) come il procedimento di collegamento progressivo della diagonale, può essere ripetuto all'interno dell'ultimo quadrato costruito (o all'esterno del primo), producendo un terzo e poi un quarto quadrato e così via, in una progressione infinita. Notevole è l'analogia iterativa col pentagramma pitagorico.

PROGRESSIONE INFINITA DEL QUADRATO COSTRUITO SULLA DIAGONALE

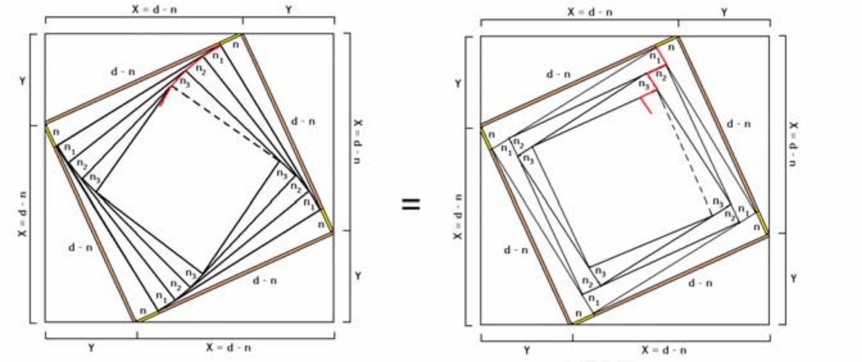


FIG. A7 FIG. B7

Fig. 11

Notare, nonostante la loro equivalenza, come la progressione infinita della Fig. 11/A7 è esteticamente e geometricamente differente rispetto a quella di Fig 11/B7; probabilmente anche un'attrazione estetica, deve aver giocato un ruolo determinante per uno studio che ha generato la prima presa di coscienza, iterando verso un concetto di "limite" e di "infinito" **(33)**

Inoltre, se dovessimo quadrettare l'area costruita sui quadrati dei lati X e Y (vedere fig. 9, fase 3) e l'area costruita sulla diagonale (fig. 9 fase 5) non possiamo non accorgerci della stupefacente analogia con la spiegazione geometrica sulle terne pitagoriche (lo gnomone dei pitagorici per i numeri dispari) che si attribuisce ai discepoli di Pitagora con quanto ci ricorda Plutarco e Proclo e che i babilonesi (così come per tutti coloro che conoscevano il diagramma), potevano aver sviluppato, per terne limitate a valori interi, allo scopo di dare una dimostrazione geometrica per casi particolari che rendevano didatticamente più elementare e percepibile la spiegazione dell'uguaglianza generale precedentemente osservata pari a: $2nd - n^2 = Y^2$.

QUADRETTATURA DELLE SUPERFICI EQUIVALENTI DELLA REGOLA GENERALE BABILONESE

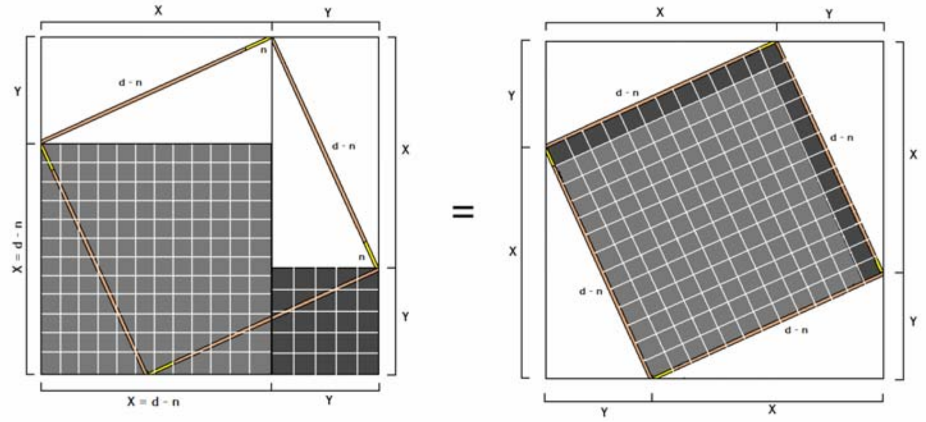


Fig. 12

Notevole è l'analogia e la presenza dello gnomone nei Sulvasutra di Apastamba. **(Vedere Allegato 13)** Inoltre, se pensiamo che l'uguaglianza che abbiamo interposto nel piano tra le varie fasi del diagramma quadratico risolvente, per i babilonesi era forse più agevole dimostrarla interponendola in altezza, **(Vedere allegato 11)** con le varie sovrapposizioni applicando un criterio di invarianza dell'area e della forma con il mutamento di composizione dei vari strati, ovvero impilando le varie fasi, ognuna corrispondente ad un livello del diagramma composto a frammenti geometrici d'argilla, l'affinità tra la tecnica babilonese e quella della tradizione rituale vedica per la costruzione degli altari, rafforzerebbe inequivocabilmente la connessione tra queste due antiche civiltà.

7. Due ipotesi conclusive

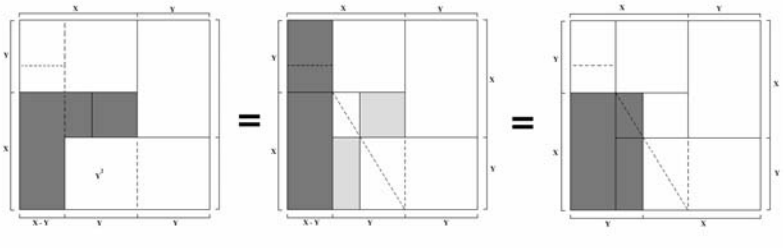
Si può concludere che, questa tecnica empirica, di una matematica fatta con mattoni, evidentemente, doveva essere applicata da tutte le grandi Civiltà di costruttori (non per questo, necessariamente conosciuta); la presenza però, di un medesimo e particolare problema, presso i Babilonesi (o i Sumeri), Egizi, Indiani e Cinesi e che richiedeva la conseguente conoscenza di un altrettanto particolare e identico criterio, collegato ad un unico e polivalente diagramma, ci lascia sostanzialmente due ipotesi:

1) O i Sumeri hanno fatto scuola,sia ai loro diretti discendenti,sia alle altre Civiltà limitrofe

2) Oppure: Sumeri, Egizi, Indiani e Cinesi, erano in origine un'unica e forse più vasta Civiltà Madre, con un'unica lingua, cultura e territorio, che poi, per ragioni a noi sconosciute o biblicamente riconducibili (La Bibbia, Genesi 11), si sono successivamente divisi, stabilendosi ognuno in territori diversi,con lingue diverse, formando Civiltà diverse e mantenendo solo inizialmente, le stesse originali conoscenze e tradizioni culturali comunemente acquisite. **(34)**

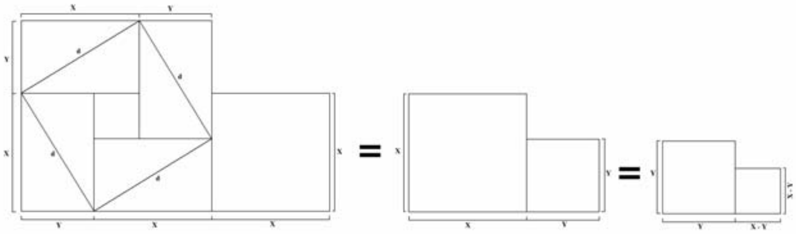
8. I due tesori della geometria

Vorrei far notare ancora, quanto sarebbe stato facile, sia per i babilonesi, sia per i pitagorici (sia per tutti coloro che conoscevano lo stesso diagramma) osservare due particolari proprietà del diagramma quadratico risolvente a modulo quadrato, suggerite sulla spinta di una semplice verifica con l'applicazione inversa della regola generale babilonese sopracitata e ravvisabile sul diagramma che visualizza il seguente quesito **(35)**



$$X^2 - Y^2 \quad = \quad (X + Y)(X - Y) \quad = \quad XY$$

Fig. 13

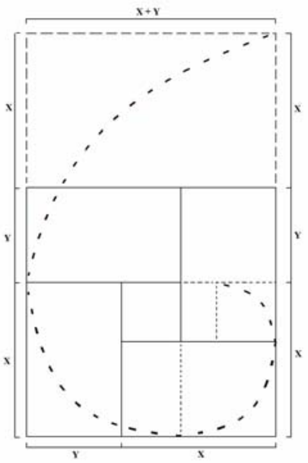


$$\phi^2 = (X + Y)^2/X^2 \quad = \quad X^2/Y^2 \quad = Y^2/(X - Y)^2$$

$$\phi^2 = (X+Y)^2 / d^2 - Y^2 \quad = \quad d^2 - Y^2/ d^2 - X^2 \quad = d^2 - X^2/(X-Y)^2$$

Fig. 14

PROPRIETÀ ITERATIVA DELLA SEZIONE
AUREA ALL'INTERNO DEL DIAGRAMMA



Storia della Matematica pag. 132 - 133
Carl B. Boyer Mondadori 2002

Fig. 15

Cosa si verifica, quando la differenza tra i due quadrati costruiti sui lati di un rettangolo qualsiasi uguaglia la superficie dello stesso rettangolo? Fig.13....Si verificano due curiose proprietà !

1) Anche il rapporto tra i due quadrati uguaglia quello tra gli stessi e i quadrati presenti nel diagramma costruiti in funzione dei lati del rettangolo e messi in rapporto tra loro. Questo particolare rapporto corrisponde al quadrato della "sezione aurea". Fig.14

2) La seconda proprietà, strettamente collegata alla prima, vede anche i rispettivi lati degli stessi quadrati entrare fra loro in uguale rapporto, pari alla ben nota "sezione aurea". Fig.15

Probabilmente, questa curiosa osservazione, è stata approfondita successivamente dai pitagorici che hanno avuto il merito di svincolarla dal diagramma babilonese.

La troviamo in effetti con Euclide in una costruzione elegante fatta con riga e compasso presente nel libro II, proposizione 11 (esposta come un caso speciale della proposizione 6) e nel libro VI, proposizione 30.

Fondamentalmente, si può ipotizzare che i Babilonesi (nonché tutti i popoli che conoscevano la tecnica artigianale del diagramma) erano già, con buona attendibilità, consapevoli della generalità e potenzialità della loro regola empirica tra i lati e la diagonale di un mattone-rettangolare qualsiasi, ben 1000 anni prima di Pitagora e sempre grazie, al loro diagramma quadratico risolvente per i problemi di 2° grado, erano inoltre e probabilmente consapevoli di una seconda straordinaria e intrinseca particolarità presente nel diagramma : quella che conduceva al noto rapporto aureo.

Possiamo affermare, che questo diagramma quadratico risolvente contiene anche intrinsecamente i due tesori della geometria ammirati da Keplero:**(36)**

1. Il “Teorema di Pitagora” o meglio la “Regola Generale Babilonese”che si visualizza e si verifica sempre in quanto la somma dei quadrati costruiti sui lati di un rettangolo qualsiasi, uguaglia sempre quella del quadrato costruito sulla sua diagonale;

2. Il “rapporto aureo” che si visualizza e si verifica solo e quando, la differenza dei quadrati costruiti sui lati di un rettangolo qualsiasi, uguaglia la sua stessa superficie.

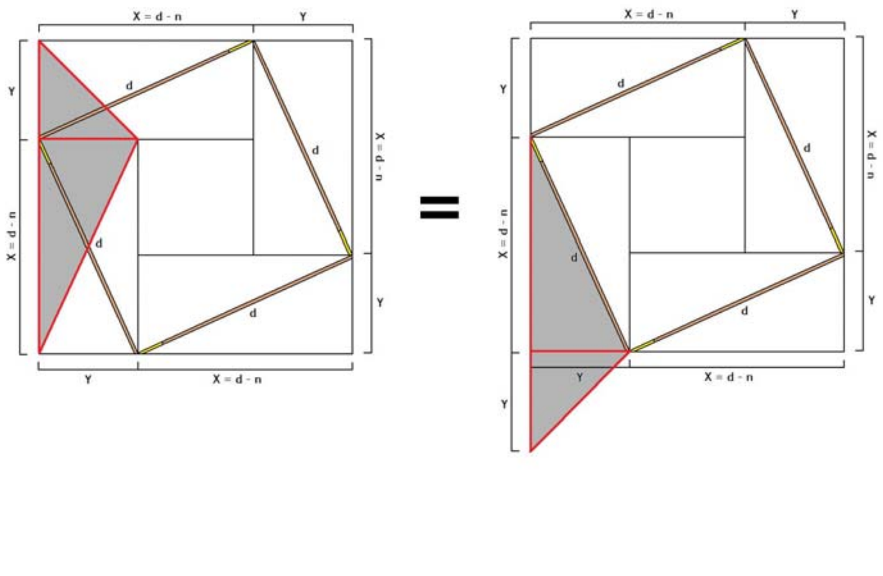
9. La probabile strada graduale.

Vorrei far vedere inoltre, come col medesimo diagramma quadratico risolvente si può dimostrare efficacemente l’uguaglianza: $3\{[(X+Y)/2]^2\}+[(X-Y)/2]^2 = X^2+XY+Y^2$; una dimostrazione già proposta nel 1978 da Tullio Viola e Livia Giacardi mediante un diagramma, utilizzato inconsapevolmente e per fini didattici, perfettamente identico con quello in argomento del presente lavoro e che aprirebbe un ulteriore indizio su una probabile connessione tra le Civiltà Orientali e quella Egizia. **(37)**. Probabilmente è dallo studio di uguaglianze come quella sopracitata che i babilonesi hanno intrapreso una strada, che gradualmente li ha condotti alla loro importantissima regola. **(Vedere allegato 14)**

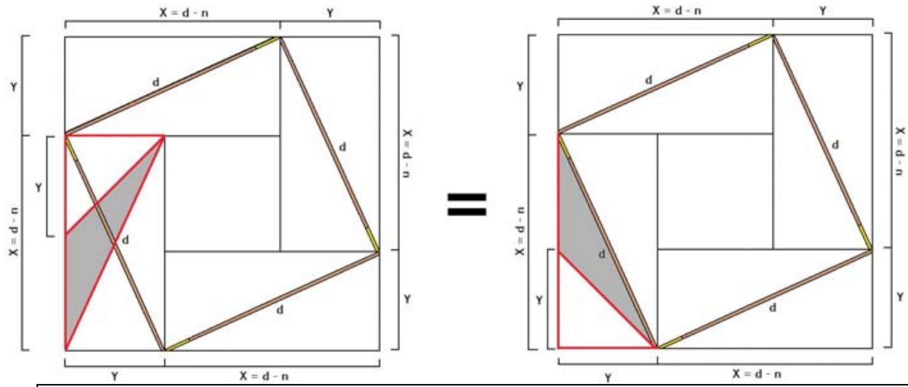
Il Plimpton 322,era forse il teorema di Lazare Carnot dell'antichità?

Rimanendo ancora in tema con la cultura babilonese, si può ipotizzare che la famosa tavoletta n° 322 (circa 2000 a.C.) della Plimpton Collection,**(38)** rappresentava probabilmente, un arcaico tentativo dei babilonesi, di estendere ulteriormente la loro regola generale per applicarla ai triangoli non rettangoli o meglio, ai quadrangoli non rettangoli, in quanto i casi limitati all'angolo retto, erano probabilmente divenuti insufficienti nel risolvere i loro problemi pratici, o fin troppo esaustivi (ormai considerati di normale routine o prassi ordinaria), da tentarne una generalizzazione, magari suggerita o intravvista col solito diagramma quadratico risolvente. Il preludio alle proposizioni n° 12 e 13 raccolte da Euclide nel Libro II degli Elementi?**(39)**

PROBABILE GENERALIZZAZIONE DELLA REGOLA BABILONESE



$d^2 = (X + Y)^2 - 2XY$; PLIMPTON 322



$d^2 = (X - Y)^2 + 2XY$; PLIMPTON 322

Fig. 16

10. Dall'Oriente a Pitagora

Per quanto sopraddetto, possiamo benissimo ipotizzare (ma è una ipotesi che avvalora i dibattiti già sostenuti da altri studiosi) **(40)** che Pitagora nei suoi viaggi, fra cui sappiamo in Mesopotamia, deve aver sicuramente appreso la funzionalità polivalente di questo diagramma che permetteva anche la risoluzione empirica dei problemi di 2° grado sopracitati, il quale, al suo ritorno in Patria e stabilitosi a Crotone, non avrebbe fatto altro che aprire e gestire, una scuola analoga con un bagaglio culturale appreso sulle conoscenze matematiche millenarie delle rinomate scuole dell'oriente, sradicandosi poi rapidamente, estrapolando, rielaborando e arricchendo quei fondamenti generali, algebrico- geometrici, già esaurientemente espliciti e basilari della cultura mesopotamica ma ancorata al loro magico diagramma d'argilla, chiamando; nel caso del teorema a Lui attribuito, semplicemente “cateti” i “lati” del rettangolo e “ipotenusa” la sua “diagonale”, svincolando così dal diagramma la “Regola Generale Babilonese” e inquadrandola sotto il profilo esclusivo della figura geometrica del “triangolo rettangolo”, anziché del “rettangolo” a cui era collegata.

Svincolarsi dal diagramma d’argilla, significava svincolarsi da quella tecnica particolarmente empirica - artigianale di tassellatura a frammenti geometrici mobili e sovrapponibili, usata nelle scuole orientali del sapere, che mal si conciliava con l’evoluzione in atto nella Magna Grecia, mediante una nuova tecnica, fatta con l’uso di riga e compasso indispensabile alla rappresentazione grafica sul papiro, quest’ultimo, una vantaggiosa novità importata dall’Egitto, che iniziava gradualmente ad imporsi **(41)** come valido ausilio unificante di comunicazione, sia culturale che amministrativa, sia della scrittura che della grafica ed esportato poi, in tutto il mondo classico.**(42)**
Il merito di Pitagora, celebrato tra i suoi successori, deve probabilmente attribuirsi al fatto che fu il primo, assieme ai sui discepoli, a tentare di far uscire, una dopo l’altra, dal diagramma quadratico risolvente, tutte quelle valide proprietà algebrico - geometriche in esso contenute e adattarle una ad una, con soluzioni altrettanto valide e alternative mediante riga e compasso, in maniera astratta e puramente intellettuale che poi, sottoforma di proposizioni venivano raccolte fedelmente e per rispecchiare l’analoga unicità del diagramma , tenute assieme o unificate mediante una necessaria impalcatura assiomatica – deduttiva inevitabilmente da ricercare e che ritroviamo esplicitamente sugli “Elementi” di Euclide.

La forza matematica dei Babilonesi era avvenuta prevalentemente dentro il loro diagramma d’argilla unificante, quella dei Greci, grazie a Pitagora, era avvenuta, per necessità sociale e culturale, uscendo fuori dallo stesso diagramma, visualizzando e riproponendo solo ciò che serviva allo scopo ultimo e adattando, le proprietà algebrico – geometriche in esso contenute, alla nuova tecnica di riproduzione fedele su papiro, col solo uso di riga e compasso.

Quindi, fu il primo ad intuire coraggiosamente quello svincolo che ha trasformato la potenzialità del diagramma e la sua tecnica artigianale, adattandola a proprio vantaggio con gli strumenti "moderni" dell'epoca, per un vantaggioso mezzo innovativo della comunicazione, consentendo ai Greci di raggiungere quel salto intellettuale e di qualità delle idee che ha contagiato lo spirito culturale delle future generazioni, producendo dopo di Lui, l'età eroica e di cui forse, per questo si sono sentiti fortemente debitori e riconoscenti nei confronti del "Pioniere Pitagora", deformando probabilmente oltremisura, la paternità e l'origine delle scoperte che la tradizione gli attribuisce.

11. Da Pitagora a Euclide

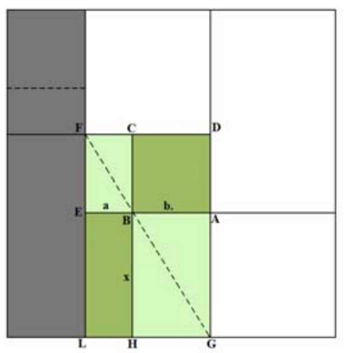
Possiamo ribadire, per quanto già esaminato, che Pitagora del "Teorema" a Lui attribuito ha avuto probabilmente il solo merito di aver tentato per primo, lo svincolo dalla sudditanza al diagramma quadratico risolvente, dovendo però a sua volta, alla pari della regola generale babilonese dimostrata empiricamente, cercare un'altrettanto valida dimostrazione generale alternativa e da costruire col solo uso di riga e compasso.**(43)**Per questo motivo Euclide, spinto dalla consapevolezza di aver ereditato l'impronta nuova della cultura ellenica, ha raccolto la sfida generazionale lanciata da Pitagora, fornendo una brillante e quanto elegante dimostrazione di questo "Teorema" inserendola nei suoi famosi libri degli Elementi **(44)**.
Una sfida innescata da Pitagora e dalla sua scuola, con la ricerca di nuove soluzioni alternative, verso tutti quei problemi

di applicazione delle aree studiati e riproposti fedelmente, dove prima erano stati sempre visualizzati e risolti dai babilonesi, mediante il loro diagramma polivalente.

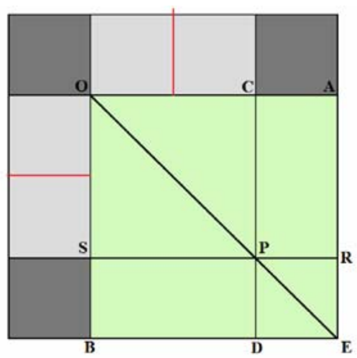
Il diagramma viene smontato e riordinato in proposizioni che saranno raccolte sugli Elementi di Euclide.

Per rendersi conto di questo fatto, è sufficiente osservare tutte le costruzioni geometriche finali delle proposizioni, che servivano a risolvere i problemi algebrici, raccolte da Euclide,ad iniziare dai primi due libri degli Elementi e confrontarle con quelle che si possono intravvedere ed estrapolare sul diagramma geometrico risolvente babilonese per la soluzione degli stessi problemi focalizzati principalmente nella quarta parte dello stesso, per convincersi della inequivocabile e analoga connessione. **(45)**

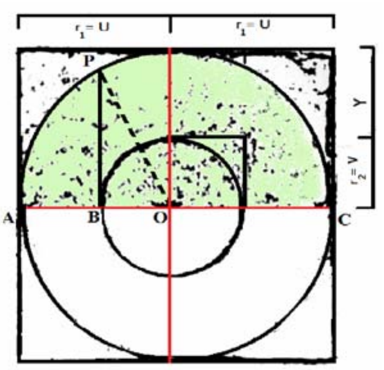
Euclide: LIBRO I – PROP. 43; $ax = b^2$



Euclide: $ax=bc$; $OA=a$; $OB=b$; $OC=c$; $CP=x$



Euclide: LIBRO II – PROP. 14; $X^2=(r_1-r_2)\ (r_1+r_2)=ab$



Euclide: LIBRO II – PROP. 1; AD (AP+PR+RB)

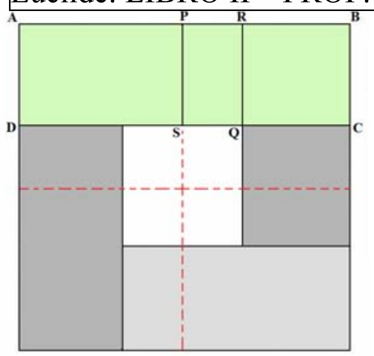
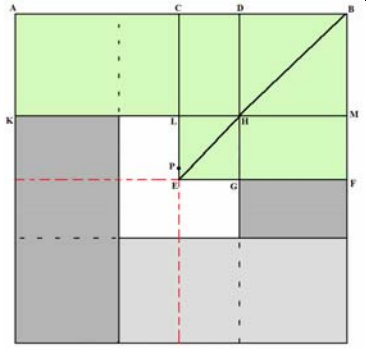
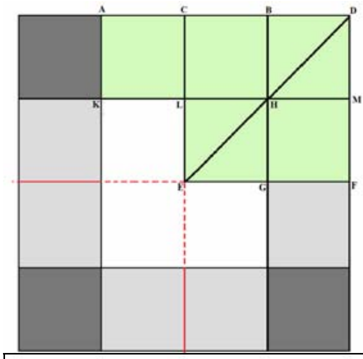


Fig. 17

Euclide: LIBRO II – PROP. 5; $ax-x^2=b^2$



Euclide: LIBRO II – PROP. 6; $ax+x^2=b^2$



Euclide: LIBRO II – PROP. 11; $ax+x^2=a^2$

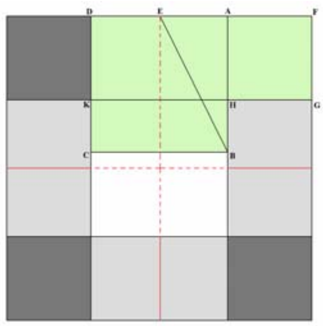


Fig. 18

Non si può non cogliere l'evidente analogia dei temi di fondo presenti sui libri degli Elementi di Euclide con quello identico sui Sulvasutra, della matematica vedica Indiana, ove sono proposte soluzioni tecniche in tutto simili a quelle euclidee **(46)**.Una procedura di scomposizione del diagramma e ricomposizione, in un nuovo ordine geometrico, iniziata dagli Indiani ed emulata mirabilmente dai Pitagorici?

Lo stesso possiamo dire della matematica Islamica, con i diagrammi di Al-Khuwarzmi, dove appaiono evidenti entrambe le tradizioni matematiche sopracitate con quella Mesopotamica **(47)**.

Certamente, quanto detto fin qui, fa parte della sfera delle congetture, che saranno più avanti rafforzate, per merito del diagramma geometrico risolvente dove, come vedremo in seguito, prenderà realisticamente forma e corpo dall'analisi di antichi problemi babilonesi contenuti nella tavoletta AO 8862. Tutto questo,lo vedremo in un articolo successivo.

---

* aldo@storiadellamatematica.it