"MATEMECUM"

Vademecum per l'insegnante di Matematica della Scuola Superiore

a cura di

Giorgio Ferrarese

Dipartimento di Matematica

Università di Torino

Introduzione

L'insegnamento della matematica, nelle Scuole di ogni ordine e grado, è diventato sempre più complesso, esteso e, purtroppo, dispersivo. Ritengo che sia importante provare a fare il punto della situazione in un momento di così grandi cambiamenti, cercando di evidenziare quali debbano essere le nozioni irrinunciabili che uno studente dovrebbe conoscere e poter utilizzare al termine del quinto anno di Scuola superiore.

La riforma universitaria ha finalmente obbligato l'Università a porsi il problema dei requisiti minimi e ogni Facoltà e quindi ogni Corso di laurea ha il compito di esplicitare quali dovrebbero essere le conoscenze e le competenze minime per uno studente che intenda proseguire con gli studi universitari.

Sicuramente questo è un ottimo punto di partenza per aiutare lo studente nella scelta dei suoi studi ed il docente a verificare l'adeguatezza del suo insegnamento. In queste pagine ho però cercato di andare oltre, tentando di approfondire le problematiche che scaturiscono dagli elenchi di requisiti minimi forniti dalle varie Università.

Se da un lato infatti tali elenchi hanno l'ottimo effetto di rassicurare lo studente sul fatto che le conoscenze di base fornite dalla Scuola superiore, se acquisite, sono più che sufficienti per sperare nel successo degli studi universitari, dall'altra gli stessi elenchi inducono i docenti della Scuola superiore a notare l'incongruità tra la vastità dei programmi che si ritrova a svolgere e la minimalità delle esigenze dei Corsi di laurea universitari e forse anche del mondo del lavoro.

Ritengo che il problema sia proprio in questo scollamento evidente che intercorre tra l'insegnamento della Scuola superiore e quello universitario, tra quello che i programmi ministeriali "impongono" di insegnare e quello che la stragrande maggioranza degli studenti possiede come bagaglio al momento di iniziare un Corso di studi universitario o di inserirsi nel mondo del lavoro. Ciò che risulta chiaro ad ogni docente universitario di matematica è, non tanto l'ignoranza matematica dei ragazzi, quanto la loro incapacità di utilizzare ciò che hanno imparato e in qualche modo fatto proprio. Non mi sembra sbagliato il paragone con quello che succedeva, e che troppo spesso succede ancora, con l'insegnamento della lingua straniera: lo studente ha assimilato una grande quantità di nozioni, grammaticali, sintattiche, culturali, ma non è capace di utilizzare la lingua straniera per esprimersi né a voce né tantomeno in forma scritta. Qualcosa di molto simile sembra succedere in matematica: lo studente si sente schiacciato da una quantità di materiale matematico che però non sa come e soprattutto quando usare.

Ben venga quindi il suggerimento latente che esce dai vari elenchi di prerequisiti universitari e cioè che non è importante che gli studenti “conoscano i programmi per intero”, ma piuttosto che sappiano usare almeno le tecniche più semplici con facilità e ragionevolezza. Questo però ad un insegnante non può bastare, infatti è ben noto che per ottenere dieci occorre richiedere cento, pur avendo ben presente che quello che ci si aspetta di ottenere dalla maggior parte della classe è l’obiettivo minimo, ossia il dieci, e che solo qualche “fuoriclasse” sarà, a volte, in grado di cogliere e far tesoro di tutto il cento che viene proposto.

"Cosa" insegnare quindi e "Come"?

Siamo tutti consapevoli che questa è una domanda da cento milioni di euro e che inoltre non esiste una risposta unica.

Per quel che riguarda il "Cosa" insegnare ho provato a raccogliere alcune idee e suggerimenti a partire dalle questioni matematiche di base per arrivare anche a qualche possibile approfondimento, sempre nell’ottica dei saperi minimi per l’Università (perciò argomenti come la Probabilità e la Statistica, insegnati in alcuni Istituti, non sono stati trattati poiché generalmente non compaiono nei requisiti minimi richiesti dalle varie Facoltà).

Per il "Come" voglio proporre una serie di semplici considerazioni "tra colleghi", affidandomi principalmente alla sensibilità del singolo docente e ritenendo che molto spesso il "Come" insegnare è strettamente legato al "Cosa" insegnare e soprattutto agli obiettivi che il docente si prefigge. Vorrei suggerire che tra questi obiettivi compaia quello di formare una classe che, al termine degli studi superiori, sappia “esprimersi in matematica”, anche se non conoscerà probabilmente le formule di prostaferesi o non saprà come "risolvere gli integrali".

Sul "Come".

- ***Parlare di matematica.*** *Parlare, parlare e ancora parlare di matematica,* della sua storia, delle sue scoperte, della sua “bellezza”, della sua utilità o, forse meglio, necessità, della sua concretezza e della sua attualità e modernità. A proposito di "parlare e parlare", mi permetto di suggerire agli insegnanti l'utilità di seguire, come vero e proprio corso di aggiornamento, un corso di dizione e/o recitazione per rendere meno faticoso per il docente e più coinvolgente ed efficace per lo studente la trasmissione verbale del sapere. Del resto è ben noto che ogni insegnante è in potenza un attore, ritengo che sarebbe sicuramente utile favorire lo sviluppo "professionale" di questa potenziale disposizione d'animo.

- ***Invenzioni matematiche.*** *Evidenziare il carattere di scoperta e di invenzione che rappresenta ogni teorema matematico* ed in particolare le grandi costruzioni matematiche, alcune delle quali ho evidenziato nel capitolo sul "Cosa", racchiudendole tra due check (✔).
- ***Matematica & co.*** *Evidenziare e cercare ogni aspetto di interdisciplinarità* tra la matematica e le altre materie. A partire dagli aspetti più evidenti che coinvolgono la Fisica e l'Informatica a quelli meno evidenti come il parallelismo tra linguaggio comune e linguaggio matematico, nel concetto di assioma, nella formulazione di una definizione, nell'esporre la dimostrazione di un teorema, nello spiegare a se stessi e agli altri i concetti e le tecniche della matematica.
  Paragonare l'importanza da tutti riconosciuta delle scoperte tecnologiche a quella delle scoperte matematiche, troppo spesso invece misconosciute.
  Utilizzare programmi software in lingua inglese, e non tradotti in italiano, per favorire una collaborazione con l'insegnante di lingua straniera. Proporre all'insegnante di italiano temi di soggetto matematico, per esempio spiegare una tecnica matematica o fare una riflessione sulle difficoltà di assimilare la materia o magari sul piacere di studiarla.
- ***Smemoranda.*** *Richiamare costantemente*, e utilizzare come spunti per esercizi*, gli argomenti già studiati*, sforzandosi di insistere sul carattere unitario della matematica per evitare che gli studenti tendano a dimenticare gli argomenti dei mesi o degli anni precedenti. Bastino come esempi argomenti come i cambiamenti di unità di misura o i volumi dei solidi e le loro superfici, concetti della Scuola media spesso dimenticati al momento di iscriversi all'Università e probabilmente anche prima.
- ***Matematica per tentativi.*** *Incoraggiare ed apprezzare nella valutazione lo studente che cerchi una soluzione per tentativi*, una verifica per esempi, quando non riesce ad ottenere una verifica "matematicamente corretta". Apprezzare anche l'uso della calcolatrice o del computer, quando ciò dimostri buone capacità pratiche e di buon senso. Ritengo che questo sia un aspetto troppo spesso trascurato dagli insegnanti di matematica, i quali pensano che la verifica parziale o il caso particolare non debbano meritare considerazione in matematica. Propongo invece l'atteggiamento opposto, invitando i docenti a stimolare gli studenti con casi particolari, con esempi, con ragionamenti magari inconcludenti, tutto al fine di far nascere in loro la voglia di provare a capire cosa succede. Toccherà poi agli studenti "più matematici" mettere ordine e intuire la legge generale, ma è importante che lo studente medio sia in grado di muoversi per ottenere un risultato magari parziale, ma utile, piuttosto che rimanere bloccato dalla paura di sbagliare e perso nei meandri della complicazione del tecnicismo matematico. Un esempio: riterrei molto positivo se un ragazzo ignorante nella derivazione, riuscisse a calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto, prendendo la retta per il punto dato ed un altro punto ad esso "molto vicino" sulla curva, trovato utilizzando la calcolatrice o il computer.

- ***Critica matematica.*** *Fare costruire esercizi e problemi dagli studenti*, possibilmente chiedendo loro di giustificare il significato delle loro proposte, abituandoli a parlare di matematica ed a porsi criticamente rispetto alle nozioni introdotte.
  Per lo stesso motivo potrebbero essere utili le mappe concettuali, proponendo la loro costruzione agli stessi studenti ed utilizzandole il docente stesso nelle discussioni comuni. L'utilizzo delle mappe favorisce la riflessione critica dello studente sui contenuti, sulle connessioni e sugli obiettivi relativi ai concetti matematici.
  Proporre costantemente esempi e far costruire dagli stessi studenti esempi*, esempi e ancora esempi*, accertandosi che essi abbiano *sempre in mente almeno un esempio ed un controesempio per ogni concetto introdotto*, anche se estremamente banale.
- ***Andante con brio.*** Proporre anche approfondimenti, ma ad un livello superficiale per la classe e con maggiore *attenzione per gli studenti più motivati* e capaci mediante ricerche e seminari, di nuovo con lo scopo di parlare di matematica. Nella parte relativa al "Cosa" sono stati evidenziati molti approfondimenti, delimitandoli con asterischi: la possibilità di proporli dipenderà dalla classe e dal tipo di Scuola.
- ***Valutazione.*** *Diversificare il più possibile le prove di verifica* e preferire risposte imprecise e parziali, ma ragionate e "sofferte", a risposte corrette, ma mnemoniche. Preferire comunque il colloquio continuativo e generalizzato con la classe all'interrogazione individuale classica.
- ***Non è mai troppo tardi.*** *Non preoccuparsi eccessivamente dei "Programmi",* utilizzando anche le nuove possibilità offerte dall'autonomia per sviluppare i vari temi secondo le reali necessità della classe e quindi spiegare e spiegare, alla lavagna, al computer, in laboratorio, senza aver paura di "perdere tempo", badando che la classe sia in grado di gestire i concetti basilari, eventualmente eliminando parti secondarie o eccessivamente tecniche del programma. Evitare poi di astrarre eccessivamente: gli studenti più capaci, sotto lo stimolo dell'insegnante, provvederanno "da soli" ad astrarre, spinti dalla loro naturale necessità di rispondere alle curiosità con cui si sono scontrati nella concretezza.
- ***Insegnare per problemi.*** *La matematica, come la scienza in generale, nasce dai problemi*. L'insegnamento per essere efficace deve seguire tale strada. Occorre insegnare per problemi! Attenzione, non mi riferisco al "problem solving", insegnare per problemi significa per me giustificare l'importanza e la necessità del teorema come strumento e insegnare a saperlo utilizzare per risolvere un problema, possibilmente collocandolo nella sua dimensione storica. In questo senso l'esercizio logico e di abilità deduttiva deve essere limitato, come esercizio di approfondimento, agli studenti di ottime capacità matematiche, riservando invece l'insegnamento standard alle dimostrazioni estremamente semplici ed illustrative di un metodo (per esempio il metodo di dimostrazione per assurdo). Ciò che ritengo importante dunque è che gli studenti (la maggior parte di essi) riescano a capire, verificando il teorema con esempi e casi particolari,

l’importanza di ottenere un risultato in generale e che capiscano come usarlo e perché sia conveniente usarlo.

Occorre precisare, onde evitare fraintendimenti, che non propongo un insegnamento tipo Scuola dell’obbligo americana (U.S.A.), basato sull’acquisizione di semplici regole di comportamento matematico. Lo scopo è quello di sostituire in generale alla dimostrazione la spiegazione e la motivazione, questo sì invece si collega perfettamente allo standard americano, ma a quello dei migliori college (si vedano per esempio i ben noti libri di Anton, di Strang, di Thomas, ecc.).

- ***Strumento di cultura.*** *Insegnare la matematica come strumento fondamentale, necessario e come conquista culturale,* così come lo sono le scienze sperimentali o così come l’italiano o la lingua straniera sono uno strumento fondamentale per esprimersi e acquisire cultura, ma anche per poter lavorare. Paragonare la conoscenza dei teoremi e delle principali tecniche matematiche alla conoscenza delle opere e degli autori della letteratura, o alle scoperte della Fisica o della Biologia (che non è possibile dimostrare, ma solo, se sufficientemente attrezzati, verificare). Il voler insegnare a dimostrare potrebbe essere paragonato a voler insegnare a scrivere una poesia o un romanzo, così come il matematico scopritore di teoremi può essere paragonato ad un poeta o ad uno scrittore. È raro che un insegnante d’italiano chieda ai ragazzi di scrivere una poesia o un romanzo, sa bene infatti quanto sia difficile anche solo far apprezzare e capire una poesia o un buon romanzo, normalmente si limita al tema, oramai anch'esso quasi superato da nuove forme come il saggio breve, che potrebbe essere paragonato in matematica ad un buon esercizio standard che dimostri il sapersi esprimere matematicamente e l’avvenuta acquisizione di fatti di cultura matematica. Continuando col parallelo poetico, si potrebbe affermare che non è impossibile chiedere ad uno studente di scrivere due rime adatte, ma una poesia non è solo una successione di rime! Ciò che è importante, dunque, non è tanto la dimostrazione in sé, ma piuttosto tutto ciò che ha condotto alla dimostrazione, le prime verifiche, i primi tentativi sbagliati (sempre molto numerosi), i casi particolari che hanno portato prima ad intuire il teorema, a credere nella sua validità, e poi a dimostrarlo. Di nuovo, insegnare per problemi, far nascere l’esigenza del risultato generale, della semplificazione, della tecnica utile: fare intuire per poi enunciare con precisione e generalità.
- ***Primo esempio***: *“non è tanto importante” saper risolvere un integrale* mediante qualche abile trasformazione, quanto è importante sapere utilizzare in modo corretto un programma che lo calcoli, sapendo verificare la correttezza del risultato della macchina e sapendolo poi applicare per esempio al calcolo di un integrale definito, che potrà essere ricalcolato, sempre con l’uso della calcolatrice, mediante approssimazione.
- ***Secondo esempio***: non insegnare tanto la geometria razionale come importante esempio di sistema ipotetico deduttivo, quanto utilizzarla per calcolare misure, anticipando nella sostanza i concetti della trigonometria. *La geometria greca è nata dai problemi di misura* e solo in un secondo tempo

è stata assiomatizzata e si sono ottenuti i "bellissimi" teoremi ad opera dei matematici. La trigonometria è geometria razionale applicata, non ha senso separarle, una giustifica l'altra. Le varie formule trigonometriche non sono altro che la necessità di fare dei conti in assenza di calcolatrici o di strumenti matematici più potenti come l'espansione in serie.

- ***Il laboratorio matematico.*** Riassumendo*, trasformare la lezione di matematica in un laboratorio di matematica* in cui gli studenti abbiano la possibilità di lavorare concretamente con gli "attrezzi matematici". Non si può imparare matematica se non si fa matematica, a qualsiasi livello; sta quindi al docente proporre agli studenti compiti adatti alle loro capacità, a partire, come già detto, da un lavoro di scoperta e di giustificazione a base di esempi e verifiche per arrivare alle prime scoperte teoriche con tanto di dimostrazione per gli studenti più motivati e capaci: non è obbligatorio diventare dei bravi matematici, ma è importante essere in grado di capire l'importanza della matematica per le applicazione e di maneggiarne con sufficiente facilità le tecniche di base.
- ***Una Scuola a tempo pieno.*** Uno degli aspetti più delicati del processo di apprendimento è sicuramente *il momento dell'elaborazione "personale".* In effetti il problema sta nel fatto che molto spesso questa elaborazione non è proprio "personale", ma piuttosto familiare o, in alcuni casi, "personalmente" assistita da qualche esperto professionista. Questo aspetto non è caratteristico solo della Scuola superiore, ma riguarda, purtroppo, tutto l'arco scolastico ad iniziare dal primo anno di Scuola elementare. Molto spesso, infatti, il motivo per cui un bambino non rende adeguatamente è proprio la mancanza di un appoggio tecnico familiare (e non morale o affettivo sia chiaro) o extrascolastico, appoggio su cui normalmente gli studenti di successo possono contare. Il problema è estremamente grave e la soluzione non è affatto semplice, occorre però che la Scuola si renda conto che è un problema reale e discriminante, che sfavorisce in partenza i ragazzi "culturalmente" non protetti. È un problema inoltre la cui soluzione richiede grandi investimenti poiché ritengo che essa non sia realizzabile se non nell'ambito di una Scuola "a tempo pieno". Consapevole di una tale difficoltà, ritengo anche che la Scuola non sia un organismo astratto e che ogni singolo docente possa portare un suo piccolo contributo indipendente in questo grande processo di trasformazione. Propongo quindi che l'insegnante di matematica tenga fortemente in considerazione questo aspetto e che misuri di conseguenza le sue richieste in base alle possibilità effettive dello studente che non può contare su un supporto extrascolastico. È chiaro che il problema è anche strettamente intrecciato con tutto l'aspetto del "recupero", che molto spesso viene affrontato nelle Scuole superiori semplicemente mediante una settimana appositamente dedicata. Il problema è però a monte ed occorre che la Scuola si riorganizzi per fornire agli studenti in difficoltà gli strumenti a loro necessari. Non è questa l'occasione adatta per discutere su quali debbano o possano essere tali strumenti; sicuramente strumenti e metodi diversi potrebbero risultare ugualmente utili. Ciò che invece ritengo di poter ribadire è che, secondo me, non è possibile trovare una soluzione al di fuori di un ambiente di sviluppo adatto e che tale ambiente è per me univocamente identificabile con il

concetto di Scuola a tempo pieno. In un momento in cui vengono meno molti dei riferimenti classici e collaudati , come la famiglia, il buon vicinato, l'oratorio, la Scuola non può fare a meno di diventare uno tra i momenti di riferimento più importanti, un momento sociale protetto in contrapposizione con i sempre più frequenti momenti individuali (non protetti) che tendono ad estraniare il ragazzo che cresce dal contesto sociale e culturale. Non è nulla di tanto astruso o rivoluzionario: *penso ad una Scuola che coinvolga pienamente la vita del ragazzo, come un college immerso e integrato nel contesto sociale*, a differenza del classico college isolato nel suo ambiente più o meno esclusivo. Vorrei osservare tra l'altro che un'esperienza di tale tipo è già positivamente attuata da anni nei Convitti Nazionali italiani ad ogni livello di Scuola, mediante l'istituzione della figura dello studente semiconvittore. Ma ora è il caso di fermarsi, un discorso di tale portata merita sicuramente un ambito più generale. Conosco perfettamente inoltre quante siano le difficoltà su questa strada, ma il fatto che un insegnante di matematica ponga all'attenzione dei colleghi e delle Istituzioni problematiche di questo tipo, anche se non cambierà sicuramente la Scuola, potrebbe contribuire a cambiare la considerazione della società nei confronti dei matematici e, cosa più importante, della matematica.

- ***L'educazione matematica.*** L'insegnante di matematica è, al pari di ogni altro docente, prima di tutto un educatore , un "formatore". In quale senso? Il termine educatore fa normalmente pensare all'educatrice di un collegio svizzero o al dispensatore di buoni consigli o sentimenti o magari al consulente di buone maniere. Niente di più lontano dal mio pensiero. Per quanto mi riguarda educare significa, appunto, formare e quindi specificamente operare al fine di *favorire lo sviluppo del senso critico nell'individuo*, aiutare il ragazzo a conoscere le proprie capacità, le proprie attitudini, per indirizzarlo verso una scelta (di studio e) di vita consapevole. È fondamentale che l'insegnante di matematica, molto spesso avvertito come "nemico" dallo studente, si senta a maggior ragione coinvolto, da "educatore matematico", nel compito di stimolare lo studente a scoprirsi, sfruttando le molteplici sfaccettature culturali di cui è ricca la matematica, le sue strette "affinità elettive" con il bello (musicale e artistico in senso lato), con la filosofia, con la storia, con il linguaggio, la poesia, e, perché no, con la sua stessa intrinseca difficoltà e gli aspetti psicologici ad essa collegati (consiglio per questo aspetto la lettura del bel libro di S. Tobias in bibliografia).

  Per esempio potrebbe essere estremamente interessante e decisamente fuori dall'ordinario, il coinvolgimento dell'insegnante di matematica nella preparazione di una rappresentazione teatrale con qualche venatura matematica di soggetto o di personaggi e magari anche nel suo allestimento scenografico (frattali spettacolari o sculture matematiche o …).

  Un approfondimento a parte merita poi, secondo me, il rapporto tra l'apprendimento matematico e scientifico più in generale e lo sviluppo nello studente della coscienza civica e sociale, nonché dei meccanismi base di autodifesa dell'equilibrio psicofisico della propria persona. Tra i vari argomenti, anche questi decisamente inconsueti per un insegnante di matematica, che riterrei importante approfondire e che forniscono spunti per collaborazioni multidisciplinari, voglio ricordare:

- *la consapevolezza della responsabilità della guida di un moto/autoveicolo*: sarebbe veramente utile ed interessante utilizzare gli innumerevoli dati e statistiche a disposizione, per dimostrare ai ragazzi quanto sia gravoso di conseguenze, per sé e per gli altri, un comportamento irresponsabile durante la guida. La Fisica potrebbe aiutare a chiarire per esempio quali sono le grandezze in gioco nella dinamica di un incidente ed a tenere ben presente quanto sia facile trasformare il proprio veicolo in una vera e propria arma offensiva.
- *informazione e media*: ritengo che sarebbe interessante per i ragazzi valutare criticamente la credibilità delle statistiche e delle informazioni scientifiche diffuse dai media e le innumerevoli implicazioni psicologiche e sociali che questa informazione, spesso troppo imprecisa, determina.
- *pubblicità*: analizzare il messaggio più o meno occulto che traspare dallo spot pubblicitario e le sue conseguenze a livello psicofisico (tra le più gravi: l'anoressia e la bulimia, ma anche lo stimolo a comprare prodotti sostanzialmente inutili se non dannosi: creme varie, ecc.). In questo ambito sarebbe interessante anche approfondire le tecniche pseudo-logiche utilizzate dalla pubblicità per convincere.
- *salute del corpo*: temi ben noti, ma sempre trascurati, come il fumo, l'abuso di alcolici e superalcolici, l'abuso dei cellulari e la mania degli SMS, il sesso irresponsabile, per poi arrivare all'uso di droghe e del doping per gli "sportivi", possono dare molti spunti all'insegnante di matematica e di scienze per un'attività congiunta e di sicura presa tra i ragazzi. L'analisi dei costi personali e sociali causati da scelte di vita pericolose può essere un buono stimolo per fare della matematica e imparare un po' di scienza applicata.
- *salute della mente*: il mondo del mistero e del paranormale rischia di essere estremamente stuzzicante per un ragazzo, parlarne analizzando i vari aspetti con gli strumenti scientifici può essere di grande aiuto per evitare brutte sorprese. Per saperne di più suggerisco di consultare il sito web del CICAP (Comitato Italiano per il Controllo delle Affermazioni sul Paranormale) http://www.cicap.org .

Troppo spesso l'insegnante di matematica, e più in generale quello di scienze, viene visto come un tecnico, un esperto da rispettare (forse da temere), ma privo di un reale "spessore culturale", ed alle volte, cosa ben più grave, addirittura privo di una sensibilità "umana". È importante invece che lo studente capisca che la matematica (la scienza) è un'avventura entusiasmante ed intellettualmente ricca di stimoli al pari delle materie "umanistiche" o della psicologia. Lo studio delle materie scientifiche completa ed arricchisce la formazione dell'individuo nel suo significato più profondo, è importante quindi che il docente di matematica interagisca attivamente con i suoi colleghi delle diverse discipline, certamente come matematico, ma soprattutto da uomo o donna di cultura. La mia speranza è che un tale atteggiamento contribuisca a creare una nuova e positiva disposizione mentale verso la scienza e faccia sì che molti dei bravi studenti che oggi, pur avendo seguito studi superiori scientifici, scelgono poi studi universitari di tipo umanistico[1], possano invece in un prossimo futuro essere sempre più attratti consapevolmente dalla *bellezza e ricchezza culturale degli studi scientifici*.

Sul "Cosa".

Gli argomenti sono formulati esponendo quello che uno studente dovrebbe sapere grazie all'insegnamento del docente.

Voglio sottolineare nuovamente che l'elenco seguente è rivolto esclusivamente al docente di matematica, escludendo nel modo più assoluto che uno studente possa trarne giovamento. Lo studente potrà invece consultare, possibilmente con l'aiuto degli insegnanti, gli elenchi di requisiti minimi redatti dalle Facoltà a cui è interessato.

Voglio inoltre ripetere che i miei suggerimenti si limitano agli argomenti strettamente collegati ai saperi minimi matematici per l'accesso agli studi universitari di tipo scientifico, almeno secondo la mia interpretazione. In particolare voglio esplicitare che i temi riprendono sostanzialmente l'impostazione del Syllabus dell'UMI[2], sul quale è basato tutto il lavoro, con l'aggiunta del sesto tema, proposto come eventuale approfondimento per gli Istituti i cui programmi non affrontano il calcolo differenziale e integrale. Pertanto l'elenco non deve essere considerato come un "programma alternativo", ma piuttosto come una rivisitazione meditata di quelle parti dei programmi ministeriali della Scuola superiore che si collegano più direttamente ai programmi dei corsi universitari di matematica. Tutto quello che l'insegnante riuscirà ad insegnare in più sulla base delle richieste dei programmi e delle necessità dell'esame di Stato sarà chiaramente il benvenuto, con la speranza però che esso possa essere integrato nell'impostazione suggerita nella parte relativa al "Come" insegnare.

Aggiungo, per concludere, che l'elenco non è completo, sono stati riportati solo i punti che ritengo più importanti e quelli sui quali penso che occorra riflettere molto attentamente anche se possono sembrare elementari, tralasciando le definizioni e le proprietà più scontate che ogni docente di matematica sa che debbono essere introdotte prima di poter affrontare argomenti che sono chiaramente successivi.

Le parti racchiuse tra check (✓) indicano argomenti matematici che ben si prestano a far capire ai ragazzi la potenza delle scoperte matematiche.

Le parti racchiuse tra asterischi indicano argomenti più difficili o di approfondimento dedicati a far intuire quello che c'è ancora da scoprire in matematica.

---

[1] Quaderno di lavoro/Marzo 2001, *Orientamento preuniversitario: un percorso operativo*, IRRE - IRRSAE Piemonte

[2] http://www.dm.unibo.it/umi/html/attivita.html

Tema 1 : strutture numeriche

- I numeri naturali e relativi: le operazioni e le loro proprietà, numeri primi.

✓Sapere scrivere i numeri naturali in basi diverse: avere ben chiara l'importanza della scrittura posizionale. ✓

Sapere eseguire semplici calcoli mentali con facilità.

Sapere eseguire l'algoritmo euclideo per calcolare il MCD.

Conoscere il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica.

Sapere dimostrare il Teorema di Euclide (esistenza di infiniti numeri primi).

Saper "verificare" per tentativi la Congettura di Goldbach: "Ogni numero pari, maggiore di 2, si può scrivere come somma di due numeri primi".

Saper "verificare" per tentativi, con la calcolatrice, l'Ultimo Teorema di Fermat, dimostrato da A. Wiles nel 1995.

Riconoscere le strutture di gruppo e di anello di **Z** *. Avere ben chiaro che la differenza è la somma con l'opposto.*

Conoscere la definizione di classi di resto mod n e riconoscere le loro strutture di gruppi, anelli e, se n è primo, campi. Avere ben chiaro che* $\mathbf{Z}_n$ ***non* *è contenuto in* **Z***. Riconoscere gli elementi di* $\mathbf{Z}_n$ *come classi di equivalenza in* **Z***.**

- I numeri razionali: le operazioni e le loro proprietà, notazioni diverse (frazioni, numeri decimali e percentuali).

Sapere trasformare i numeri periodici sotto forma di frazione. Possibilmente sapere dimostrare la formula di conversione e sapere caratterizzare le frazioni che generano numeri decimali periodici.

Avere ben chiaro che la scrittura $2 \leq 2$ *è corretta.*

Sapere ordinare numeri razionali scritti nella stessa forma e in forme diverse.

Avere ben chiaro che una percentuale è una frazione. Sapere operare con facilità con le percentuali, in particolare quelle composte. Conoscere le varie tipologie di grafici (a torta, istogrammi,...): saper utilizzare a questo fine software tipo Excel.

Saper riconoscere i numeri razionali come esempio di classi di equivalenza.

Riconoscere le strutture di gruppo, di anello e di campo di **Q***. Avere ben chiaro che la differenza è la somma con l'opposto e che la divisione è il prodotto con l'inverso.*

Sapere riconoscere che tra due numeri razionali esiste sempre un numero razionale e quindi infiniti.

- Potenze di numeri razionali con esponente razionale: proprietà delle potenze.

Sapere calcolare radici di vario indice per tentativi usando solamente il tasto prodotto della calcolatrice.

Sapere discutere le differenze tra i casi: base >1, < 1 *(eventualmente negativa) ed esponente* >0, <0, >1, <1. *Saper tracciare grafici per punti delle relative funzioni potenza ed esponenziali e avere ben chiare le differenti rapidità di crescita (→ tema 5). Saper tracciare e confrontare nello stesso grafico l'andamento di* x^2 *e di* 2^x.

- Numeri reali e loro proprietà: ordine di grandezza , definizione di valore assoluto, il numero π.

Riconoscere i numeri reali come "numeri con la virgola" anche con infinite cifre decimali.

Avere chiaro che un numero irrazionale è noto quando è possibile approssimarlo con l'esattezza voluta.

Conoscere un metodo per approssimare il numero π. Avere ben chiaro che $\frac{\pi}{3} \approx 1$.

Sapere che $\sqrt{2} \approx 1.41$ *e* $\sqrt{3} \approx 1.7$.

Sapere costruire numeri irrazionali, dando la regola per determinare la parte decimale infinita non periodica.

Conoscere la definizione di "numero aureo" ed una sua approssimazione.

Sapere dimostrare che* $\sqrt{2}$ *è irrazionale.

Conoscere la notazione esponenziale dei numeri reali e la definizione di ordine di grandezza. Saper passare dalla notazione posizionale alla notazione esponenziale e viceversa, anche con l'uso della calcolatrice. Saper valutare l'errore di un'approssimazione.

Conoscere la definizione del numero di Nepero* **e *ed il suo significato in termini di interesse composto. Numeri algebrici e trascendenti.**

Riconoscere la struttura di campo di **R**. *Sapere provare che tra due numeri reali esiste sempre un terzo numero reale e quindi infiniti, distinguendo tra i vari casi (numeri razionali e irrazionali).*

Saper giustificare la relazione $|a+b| \leq |a|+|b|$, *con esempi in cui non vale l'uguaglianza.*

Conoscere la "legge di annullamento del prodotto per i numeri reali".

**Possibilmente conoscere* $\mathbf{Z}_4$ *o* $\mathbf{Z}_6$ *(o* $\mathbf{Z}_n$ *, n non primo) come esempio di anello in cui non vale la "legge di annullamento del prodotto". **

- Potenze di numeri reali con esponente reale: proprietà.

Sapere calcolare una potenza in modo approssimato con la calcolatrice utilizzando solamente le potenze ad esponente intero e le radici ennesime.

- Logaritmi ed esponenziali: proprietà .

✓*Avere ben chiara la definizione di logaritmo.* ✓

Avere ben chiaro il concetto di logaritmo come operatore inverso dell'esponenziale. (→ tema 3)

Sapere verificare le proprietà dei logaritmi conoscendo le proprietà degli esponenziali.

Sapere verificare con esempi la validità delle proprietà dei logaritmi utilizzando la calcolatrice: per esempio Log(12)=2Log(2)+Log(3).

Conoscere che la parte intera del logaritmo decimale di un numero reale è l'ordine di grandezza di quel numero.

Dare esempi dell'utilità degli esponenziali e dei logaritmi nelle applicazioni (decadimento radioattivo, scale musicali, Ph, scale dei terremoti,…).

Sapere utilizzare con facilità la calcolatrice per eseguire i conti.

- Cambiamenti di unità di misura.

Sapere effettuare con facilità cambiamenti di unità di misura nei vari contesti (anche se si tratta di programma della Scuola di base è importante verificare che non sia stato dimenticato).

- Strumenti di calcolo.

Saper usare una calcolatrice con facilità.

Tema 2 : algebra, equazioni e disequazioni

- Polinomi : operazioni e proprietà, divisione tra polinomi in una indeterminata.

Sapere utilizzare con sicurezza le regole del calcolo letterale.

Conoscere la definizione di polinomio, come somma di monomi.

Conoscere i prodotti notevoli fino al terzo grado. Conoscere il metodo del triangolo di Tartaglia e l'uso dei coefficienti binomiali.

Riconoscere la struttura di anello di **R**[x] *e saperla porre a confronto con quella di* **Z**.

Sapere quando e come poter dividere (col resto) due polinomi.

Riconoscere le analogie della divisione in **R**[x] *e in* **Z**. **Conoscere l'algoritmo euclideo per il calcolo del MCD*. Conoscere la regola di Ruffini.*

Conoscere il significato di fattorizzazione di un polinomio, di polinomio irriducibile; riconoscere le analogie con i numeri primi. Sapere fattorizzare un polinomio nei casi più semplici.

Conoscere il Teorema Fondamentale dell'Algebra in* **R[x].***

Riconoscere la struttura di anello di **R**[x,y] *e di* **R**[x,y,z], *in generale di* **R**[$x_1, x_2, \ldots, x_n$].

- Espressioni razionali fratte.

Sapere semplificare espressioni razionali fratte nei casi più semplici.

Riconoscere la struttura di campo di* **R(x) *e saperla confrontare con* **Q**.***

- Equazioni algebriche in una incognita di primo e secondo grado. Cenni per i gradi superiori.
Riconoscere la differenza tra equazione ed identità. Sapere distinguere il concetto di zero o radice di un polinomio in una indeterminata da quello di soluzione di un'equazione algebrica.
Avere ben chiaro cosa significa portare da un membro all'altro addendi o fattori di un'equazione.
Conoscere il Teorema di Ruffini: avere ben chiaro che conoscere un fattore lineare di un polinomio equivale a conoscere una soluzione dell'equazione relativa.
Sapere ricavare la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado
Avere ben chiaro che un'equazione di secondo grado ammette soluzioni (eventualmente coincidenti) se e solo se il polinomio relativo è decomponibile.
Conoscere e saper ricavare le relazioni esistenti tra le soluzioni di una equazione di secondo grado e i suoi coefficienti.
Sapere discutere l'esistenza di soluzioni razionali per un'equazione a coefficienti interi.
Sapere trovare le soluzioni di equazioni di grado superiore al secondo ottenute uguagliando a zero prodotti di polinomi in una indeterminata di primo e secondo grado in base alla legge di annullamento del prodotto per i numeri reali. "Sapere che soluzioni del prodotto = unione delle soluzioni dei fattori".
Sapere costruire equazioni che ammettano soluzioni date.
Sapere che un'equazione di grado dispari ammette sempre una soluzione reale.
Sapere che non esiste una formula generale per le soluzioni di un'equazione di grado maggiore o uguale a cinque, mentre esistono formule per i gradi inferiori.
Sapere che esistono metodi numerici per approssimare le soluzioni di un'equazione algebrica.

- Disequazioni in una incognita di primo e secondo grado. Cenni per i gradi superiori.
Avere ben chiaro cosa significa portare da un membro all'altro addendi o fattori di una disequazione.
Avere ben chiara l'interpretazione geometrica nel piano cartesiano di una disequazione di primo o secondo grado, in particolare il metodo della parabola. (→ tema 4)
Sapere trovare le soluzioni di disequazioni di grado superiore al secondo ottenute come "prodotto di disequazioni" di primo e secondo grado. Sapere mettere in relazione il segno del prodotto con il concetto di unione ed intersezione.

- Semplici esempi di equazioni e disequazioni fratte in una incognita, con radicali e valori assoluti, riconducibili alle equazioni e disequazioni precedenti.
Sapere discutere le soluzioni di una semplice equazione o disequazione che contenga valori assoluti in base ai concetti di unione e di intersezione.
Sapere discutere l'esistenza delle radici di indice pari e dispari.

Sapere discutere il segno di una frazione. Sapere mettere in relazione il segno del quoziente con i concetti di unione ed intersezione.
Avere ben presente che alcune trasformazioni adottate per risolvere una equazione o una disequazione possono aggiungere o far perdere alcune soluzioni.

- Equazioni algebriche in due incognite di primo e secondo grado. Cenni ai gradi superiori.
Avere ben chiaro il concetto di soluzione di un'equazione in due (o più) incognite.
*Conoscere l'interpretazione geometrica nel piano e nello spazio cartesiani: rette nel piano e piani paralleli all'asse z nello spazio, * coniche nel piano e cilindri (quadrici) con generatrici parallele all'asse z nello spazio . * ($\rightarrow$ tema 4)*
Sapere mettere in relazione i concetti di soluzione di un 'equazione "prodotto" e di unione.

- Sistemi lineari in due e tre incognite.
Avere ben chiaro il concetto di soluzione di un sistema, in generale, e metterlo in relazione col concetto di intersezione.
Conoscere il metodo di soluzione per sostituzione.
Conoscere esempi di sistemi lineari con nessuna, una ed infinite soluzioni. Saper distinguere il caso dei sistemi lineari omogenei.
*Sapere interpretare geometricamente nel piano * e nello spazio* cartesiani le soluzioni di un sistema lineare. ($\rightarrow$ tema 4)*
Saper discutere il caso di sistemi lineari in una sola incognita nel piano e in due sole incognite nello spazio.

- Disequazioni algebriche in due incognite di primo e secondo grado. Cenni ai gradi superiori.
Conoscere che ogni equazione (algebrica) suddivide il piano in più parti, in ciascuna delle quali il segno dell'espressione associata rimane costante.
Sapere discutere, nei casi più semplici, le soluzioni di una disequazione con il metodo grafico.
Sapere mettere in relazione i concetti di soluzione di una disequazione "prodotto" e di un sistema di disequazioni con i concetti di unione e intersezione.

- Cenni ai sistemi in due incognite di grado superiore al primo, in particolare di grado due.
Conoscere esempi di sistemi con nessuna, finite ed infinite soluzioni. Riconoscere un sistema omogeneo.
Cenni sull'interpretazione geometrica: intersezione di curve algebriche, in particolare: intersezione retta-curva di grado* n *e Teorema Fondamentale dell'Algebra.

- Strumenti di calcolo.

Sapere utilizzare con facilità una calcolatrice e un programma di calcolo simbolico come: Maple V, Derive, Mathematica o altri.

Tema 3 : insiemi, logica, funzioni e calcolo combinatorio

- Insiemi.

Conoscere i seguenti simboli:

-appartenenza ($\in, \notin$),insieme vuoto ($\emptyset$), inclusione ed uguaglianza($\subset, \subseteq, \not\subset, =, \neq$), intersezione ($\cap$), unione ($\cup$), differenza e complementare (X-A), prodotto cartesiano ($A\times B$), et ($\wedge$), oppure ($\vee$), tale che (/), **N , Z, Q, R**.

-quantificatori : per ogni ($\forall$), esiste ($\exists$), esiste uno e uno solo ($\exists!$).

-implicazioni (se… allora, $\Rightarrow$, condizione sufficiente, necessaria),

-equivalenze ($\Leftrightarrow$, se e solo se, condizione necessaria e sufficiente),

-alfabeto greco e inglese.

- Ragionamento logico.

Sapere distinguere l'ipotesi dalla tesi. Sapere fare esempi di implicazioni e di equivalenze. Sapere scrivere tali esempi utilizzando il linguaggio matematico nelle varie forme.

Sapere fare (almeno) un esempio di dimostrazione per assurdo.

Sapere scrivere facili programmi in un linguaggio di programmazione.

- Relazioni.

Conoscere i concetti di relazione di equivalenza (numeri razionali) e di ordine. Conoscere il concetto di partizione. Sapere che una relazione di equivalenza determina una partizione dell'insieme in cui è definita (razionali come partizione delle frazioni).

Saper fare esempi di ordine parziale (inclusione tra sottoinsiemi) e totale (minore uguale tra numeri reali).

- Funzioni.

Conoscere il concetto di dominio e codominio di una funzione.

Conoscere come esempi di funzioni le traslazioni e le rotazioni nel piano: riconoscere le traslazioni e le rotazioni come isometrie. ($\rightarrow$ tema 4)

Conoscere il concetto di funzione costante.

Riconoscere i termini funzione, applicazione e mappa come sinonimi.

Conoscere il concetto di funzione distanza sulla retta e sul piano: sapere giustificare la validità della "disuguaglianza triangolare". (→ tema 4)

Conoscere come esempio di funzione distanza nel piano la distanza del taxi.

Conoscere il concetto di composizione di funzioni.

Conoscere il concetto di funzione biiettiva o corrispondenza biunivoca o 1-1.

Cenni sulla definizione di insieme infinito

Conoscere il concetto di funzione identica e di funzione inversa: in particolare saperli applicare al caso delle funzioni esponenziale e logaritmica. (→ tema 1)

Sapere comporre traslazioni e rotazioni: sapere che una composizione di traslazioni è una traslazione e che una composizione di rotazioni è una rotazione.

Conoscere che l'insieme delle traslazioni e l'insieme delle rotazioni del piano costituiscono esempi di gruppi.

Sapere riconoscere i polinomi in una indeterminata come funzioni da **R** *in* **R**. *Avere ben chiaro il Principio di Identità dei Polinomi.*

Conoscere le proprietà di linearità di un'applicazione lineare da **R** *in* **R**.

Riconoscere un polinomio omogeneo di grado 1 *come applicazione lineare da* **R** *in* **R**.

Riconoscere come applicazioni lineari da **R** *in* **R** *il perimetro dei poligoni regolari in funzione del lato, la lunghezza di una circonferenza in funzione del raggio,… . (→ tema 4)*

** Vettori del piano, matrici e applicazioni lineari nel piano. **

- *Calcolo combinatorio.*

Conoscere i concetti di permutazione, disposizione, combinazione.

Conoscere i simboli $n!$, $\binom{n}{k}$.

Conoscere la definizione elementare di probabilità matematica. Sapere effettuare calcoli di probabilità utilizzando le nozioni di calcolo combinatorio introdotte.

- Strumenti di calcolo e scrittura.

Saper usare un programma di composizione testi che permetta la gestione del formalismo matematico e delle figure (Word, TeX o altri).

Saper usare un programma di disegno (Word o altri).

Saper usare un foglio elettronico (Excel o altri).

Saper usare Power Point (o programmi analoghi).

Saper usare una calcolatrice e un programma di calcolo come Maple V, Derive, Mathematica o altri.

Tema 4 : geometria

- Geometria razionale (o euclidea).

Riconoscere la differenza tra postulato o assioma e teorema.

Sapere fare esempi di enunciati di postulati e di teoremi.

Avere ben chiara l'importanza di sapere enunciare con precisione una definizione (in geometria ed in matematica più in generale). Sapere fare esempi di enunciati di definizioni.

Sapere che per due punti del piano passa una e una sola retta.

Saper distinguere tra illimitato (la retta) e infinito (il segmento); sapere fare più esempi.

Sapere che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

Conoscere gli enunciati dei tre criteri di congruenza (o uguaglianza) per i triangoli.

Avere chiaro il concetto di rigidità di un triangolo (in relazione al terzo criterio di congruenza) e la sua importanza per le applicazioni.

✓*Conoscere una dimostrazione del Teorema di Pitagora.* ✓

✓*Conoscere l'enunciato del Teorema di Talete e saperlo applicare. (→ trigonometria)* ✓

Conoscere il concetto di similitudine tra triangoli.

Sapere che per due punti dello spazio passa una e una sola retta.

Sapere che per tre punti non allineati dello spazio passa uno ed un solo piano.

- Angoli.

Sapere misurare gli angoli in gradi e radianti. Avere ben chiaro che $\frac{\pi}{3} \approx 1$.

Sapere utilizzare con facilità la calcolatrice per cambiare unità di misura.

- Poligoni.

Conoscere i concetti di assi, bisettrici, mediane, altezze di un triangolo.

Avere chiaro che l'esistenza di un triangolo che abbia lati di lunghezze assegnate equivale al fatto che tali lunghezze soddisfano la "disuguaglianza triangolare". (→ tema 3)

Conoscere il concetto di baricentro di un triangolo. (→ Cenni storici : il "Metodo" di Archimede *)*

Saper calcolare il perimetro e l'area di un poligono regolare in base al lato e all'apotema (→ trigonometria).

- Circonferenza.

Avere ben chiaro che per tre punti del piano non allineati passa una e una sola circonferenza.

Conoscere l'esistenza del cerchio inscritto e del cerchio circoscritto ad un triangolo.

Formula della lunghezza di una circonferenza e dell'area del cerchio. (→ Calcolo approssimato di π, tema 1).

Conoscere la misura approssimata della circonferenza e del raggio terrestri.

- Solidi.

Sapere calcolare le aree superficiali (laterali e totali) e i volumi di cubo, parallelepipedo, prisma, piramide, cilindro, cono e sfera. (→ Cenni storici : il "Metodo" di Archimede *)*

Conoscere i solidi platonici come unici poliedri regolari.

Conoscere la Formula di Eulero per i poliedri convessi.

- Trasformazioni e movimenti rigidi.

Sapere cosa significa applicare una traslazione, una rotazione, una simmetria assiale o centrale nel piano.

Conoscere il concetto di omotetia come dilatazione o contrazione.

Sapere collegare i concetti precedenti con le funzioni corrispondenti di un programma di disegno per computer. Esempio: omotetia e zoom.

Conoscere gruppi di trasformazioni (traslazioni, rotazioni) e gruppi di simmetrie dei poligoni elementari.

- ✓Geometria analitica del piano. ✓

Conoscere il significato di riferimento cartesiano sulla retta e di corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e i numeri reali.

Geometria piana: distanza di due punti, punto medio di un segmento, rette, mutua posizione di due rette nel piano, mutua posizione retta-circonferenza, mutua posizione di due circonferenze, parabola ad asse verticale, iperbole equilatera riferita agli asintoti (proporzionalità inversa). Fasci di rette.

Fasci di circonferenze.

Sapere lavorare con le equazioni delle intersezioni e delle unioni delle curve precedenti. (→ tema 2)

Avere ben chiaro che le equazioni $xy=0$ *o* $x^2-y^2=0$ *rappresentano ciascuna due rette.*

Avere ben chiaro che non sempre un'equazione rappresenta una curva: per esempio $x^2+y^2+1=0$ *o* $x^2+y^2=0$.

Sapere trovare punti di una retta o di una conica del tipo precedente.

Sapere caratterizzare le parti di piano "delimitate" da rette e coniche del tipo precedente. (→ tema 2)

Sapere trovare le rette tangenti alle coniche del tipo precedente in un loro punto, imponendo che l'intersezione tra retta e curva sia costituita da un solo punto (contato due volte).

Cenni alle curve di grado superiore al secondo: tracciamento di grafici con il computer (esempi di forme di cubiche e la classificazione di Newton). Intersezione retta-curva di grado n. (→ tema 2) Curve di Fermat:* $x^n+y^n=1$. *(→ tema 1)

Cenni sulle equazioni parametriche delle curve piane precedenti. Curve piane parametrizzate razionali (rette, semirette, segmenti, coniche con il metodo del fascio) e trascendenti (seno, coseno, tangente, logaritmo, esponenziale). (→ tema 5)

Equazioni della proiezione stereografica tra circonferenza (meno un punto) e retta.

Coordinate polari: passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane e viceversa. Sapere riconoscere le equazioni in coordinate polari di una semiretta di origine O, di una circonferenza di centro O, di una spirale archimedea e logaritmica.

- Trasformazioni del piano in coordinate.

Conoscere le equazioni di una traslazione.

Saper trovare le equazioni delle traslate di rette e delle coniche del tipo precedente.

Conoscere le equazioni di una simmetria centrale di centro l'origine e di una simmetria assiale di asse un asse coordinato.

Conoscere le equazioni di una omotetia di centro l'origine.

- Cenni di geometria analitica dello spazio.

Sapere che le equazioni lineari nello spazio rappresentano piani.

Sapere discutere in modo intuitivo la mutua posizione di due piani nello spazio.

Riconoscere in modo intuitivo la retta nello spazio come intersezione di due piani.

Sapere discutere in modo intuitivo la mutua posizione di piano e retta nello spazio.

Sapere discutere in modo intuitivo la mutua posizione di sfera e piano o di due sfere nello spazio.

Riconoscere in modo intuitivo la circonferenza come intersezione di un piano e di una sfera o di due sfere.

Sapere discutere in modo intuitivo l'intersezione di tre piani nello spazio.

Sapere discutere in modo intuitivo la mutua posizione di due rette nello spazio.

Sapere riconoscere in modo intuitivo che le equazioni algebriche in due incognite nello spazio rappresentano cilindri (piani se di grado 1) con generatrici parallele all'asse z.

- Trigonometria.

Sapere utilizzare con facilità la misura in radianti per gli angoli.

✓*Riconoscere la trigonometria come applicazione della geometria razionale ed in particolare del Teorema di Talete.* ✓

Avere ben chiara la definizione di seno, coseno, tangente di un angolo come coordinate di punti del cerchio trigonometrico e della retta $x=1$.

Conoscere a memoria i valori assunti dalle funzioni trigonometriche in corrispondenza degli angoli notevoli.

Sapere che $\cos(1) \approx \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *(più precisamente di poco maggiore, poiché* $1 < \frac{\pi}{3}$ *) e che* $\sin(1)$ $\approx \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *(più precisamente di poco minore, poiché* $1 < \frac{\pi}{3}$ *).*

Riconoscere la relazione $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *come applicazione del Teorema di Pitagora.*

Conoscere le equazioni parametriche di una circonferenza concentrica al cerchio trigonometrico mediante seno e coseno.

Conoscere le formule di duplicazione per seno e coseno.

Sapere "risolvere" i triangoli rettangoli.

Riconoscere il Teorema di Carnot come generalizzazione del Teorema di Pitagora.

Sapere esprimere il seno e coseno di α *in funzione della tangente di* $\frac{\alpha}{2}$ *e, * mediante tali funzioni sapere ricavare le equazioni parametriche razionali per il cerchio trigonometrico o una circonferenza ad esso concentrica.**

Conoscere le definizioni di arcoseno, arcocoseno e arcotangente.

Sapere eseguire facili misure con la trigonometria.

Sapere tracciare per punti i grafici delle funzioni trigonometriche e delle loro "inverse".

** Conoscere una formulazione intuitiva del Teorema di Fourier ed alcune sue applicazioni, per esempio all'approssimazione del tracciato del battito cardiaco, di un'onda rettangolare o simili.**

- Strumenti di calcolo.

Uso di una calcolatrice grafica e di un programma come Maple V, Derive, Mathematica o altri.

Tema 5 : funzioni numeriche

- Successioni.

Conoscere esempi di successioni tra cui la successione di Fibonacci.

Sapere riconoscere progressioni aritmetiche e geometriche.

Saper ricavare la formula per la somma dei primi n numeri.

Riconoscere i numeri periodici come somme infinite (serie) convergenti.

**Sapere utilizzare la formula di conversione per trasformare in frazione un numero periodico per calcolare il limite delle serie convergenti corrispondenti. Es.:* $1/9 = 0.\overline{1} = \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$. *

* $\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = 0.\bar{1}$ (in base 2) =1 *(mediante la formula di conversione in base* 2*)* , $\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = 0.\bar{1}$ (in base 3) =1/2 *(mediante la formula di conversione in base* 3*),… in generale* $\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{p^n} = \frac{1}{p-1}$*, dove p è un intero maggiore di* 1.*

- Funzioni.

Conoscere l'andamento dei grafici delle seguenti funzioni:

Polinomi di primo e secondo grado in una indeterminata.

Valore assoluto. Parte intera.

Radice quadrata. Attenzione : avere ben chiaro che, per definizione, $\sqrt{4} = 2$ *e non* ± 2.

Funzioni potenza.

Esponenziali.

*Logaritmi. *Saper utilizzare le scale logaritmiche e doppiamente logaritmiche: sapere verificare che, utilizzando tali scale, i grafici delle funzioni potenza ed esponenziale diventano rette.**

Funzioni trigonometriche. Avere ben chiaro il concetto di periodo di una funzione trigonometrica.

Conoscere i concetti di funzione pari, dispari, definite a tratti e i concetti di asintoto, concavità, massimo, minimo.

Sapere eseguire un esame qualitativo dei grafici delle funzioni elencate mediante i concetti precedenti.

Sapere eseguire un esame comparativo tra i grafici delle funzioni precedenti: in particolare avere ben chiare le differenti rapidità di crescita delle funzioni logaritmo, potenza ed esponenziale, e lo sfasamento tra seno e coseno. (→ tema 1 e 3)

- Strumenti di calcolo.

Uso di una calcolatrice grafica e di un programma come Maple V, Derive, Mathematica o altri.

Tema 6: cenni di calcolo differenziale ed integrale

- Limite.

Conoscere il concetto intuitivo di limite di una successione numerica.

Saper utilizzare la calcolatrice per verificare intuitivamente la convergenza di una successione.

Conoscere esempi di successioni convergenti, non convergenti e divergenti.

Conoscere il significato delle notazioni $x \to a, \pm\infty$ *o* $f(x) \to b, \pm\infty$.

Conoscere il concetto intuitivo di limite finito o infinito di f(x) *per* $x \to a, \pm\infty$. *Conoscere esempi di non esistenza del limite: in particolare* sin(1/x) *per* $x \to 0$.
Conoscere la definizione di funzione continua: conoscere esempi di funzioni non continue: in particolare la funzione parte intera.

- Derivata del primo ordine.
Avere ben chiaro il significato geometrico della derivata in un punto essendo noto il concetto di retta tangente come caso limite di retta secante.
Conoscere esempi di funzioni non derivabili almeno in un punto: in particolare la funzione valore assoluto.
Conoscere il concetto di funzione derivata. Applicazioni: il concetto di velocità.
Riconoscere l'equazione $y' = f(x)$ *come esempio di "equazione differenziale".*
Conoscere le derivate delle funzioni notevoli elencate al tema 5.
Sapere studiare l'andamento qualitativo della funzione derivata in relazione all'andamento della funzione derivanda e viceversa.
Cenni sulle derivate di ordine superiore e sul polinomio di Taylor.

- Integrale.
Conoscere il concetto di integrale definito = area con segno del sottografico della funzione.
Applicazioni: lo spazio percorso durante un moto rettilineo come integrale della velocità rispetto al tempo.
Conoscere il concetto di integrale indefinito = operatore inverso della derivazione. Conoscere il concetto di funzione integrale.
Sapere formulare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale: realizzare che l'integrale indefinito permette di calcolare aree di sottografici e l'integrale definito permette di approssimare la funzione integrale.
Avere chiaro che l'area del sottografico della funzione $y=1$, *rispettivamente* $y = x$, *tra* 0 *e* x *è l'area* x *del rettangolo relativo, rispettivamennte l'area* $\frac{x^2}{2}$ *del triangolo relativo.*
Sapere calcolare l'area del settore di parabola, confrontando il metodo moderno con il calcolo eseguito da Archimede nel suo "Metodo".
Sapere studiare l'andamento qualitativo della funzione integrale in relazione all'andamento della funzione integranda e viceversa.

- Strumenti di calcolo.
Uso di una calcolatrice e di un programma come Maple V, Derive, Mathematica o altri.

Cenni storici

- Vita e opere di matematici (cenni).

Euclide: gli "Elementi".

Pitagora: il Teorema di Pitagora, la scoperta dei numeri irrazionali.

*Archimede: il metodo di esaustione, il calcolo approssimato di π, la superficie e il volume della sfera, *il "Metodo"*.*

Fibonacci: la successione di Fibonacci, la scrittura posizionale.

Cartesio: la geometria analitica.

Fermat: la geometria analitica, la teoria della probabilità (con Pascal), l'Ultimo Teorema di Fermat, la nascita della teoria dei numeri.

Gauss: costruzione dei poligoni regolari con riga e compasso,"la teoria dei numeri è la regina della Matematica", le geometrie non euclidee.

Newton: il calcolo differenziale e integrale (con Leibniz), primo tentativo di classificazione delle curve cubiche piane.

Galois, Abel: l' impossibilità di risolvere in generale le equazioni algebriche di grado maggiore o uguale a cinque.

Poincaré: la nascita della topologia.

Cantor: il finito e l'infinito.

Hilbert: i grandi problemi matematici del "nuovo" secolo, revisione dei postulati della geometria euclidea.

Turing: la nascita dell'informatica.

Wiles: la dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat.

Alcuni libri utili ed altro ancora

Carl B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori

D. R. Green, J. Lewis, *Le scienze con il calcolatore tascabile,* Franco Muzzio

D'Arcy W. Thompson, *Crescita e forma*, Bollati Boringhieri

David Hilbert, Stefan Cohn Vossen, *Geometria intuitiva,* Bollati Boringhieri

Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: un'eterna ghirlanda brillante*, Adelphi

Edward Stabler, *Il pensiero matematico*, Bollati Boringhieri

Emma Castelnuovo, *Didattica della matematica,* La Nuova Italia

Emma Castelnuovo, *Documenti di un'esposizione di matematica,* Bollati Boringhieri

Emma Castelnuovo, Mario Barra, *Matematica nella realtà,* Bollati Boringhieri

Franco Conti, *Calcolo - Teoria e applicazioni,* McGraw-Hill

Frank Land, *The language of mathematics,* John Murray (disponibile presso la Biblioteca "G. Peano" del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino)

Giovanni Prodi, *Matematica come scoperta, v. 1 e 2,* D'Anna

Keith Devlin, *Dove va la matematica,* Bollati Boringhieri

Keith Devlin, *Il gene della matematica,* Longanesi

Margherita Roggero, Giorgio Ferrarese, *Matematica zero – Corso di sopravvivenza matematica,* C.E.A.

Morrison & Eames, *Potenze di dieci*, Zanichelli

Richard Courant , Herbert Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Bollati Boringhieri

Sheila Tobias, *Come vincere la paura della matematica,* Longanesi

Theoni Pappas, *Le Gioie della Matematica,* Franco Muzzio

Vinicio Villani, *Matematica per discipline biomediche,* McGraw-Hill

Walter W. Sawyer, *Guida all'insegnamento della Matematica 2, Ricerca del Metodo,* Boringhieri

- Potrebbe inoltre risultare utile consultare i libri attinenti il programma della Scuola superiore della Collana Schaum, in lingua inglese o tradotti in italiano per le edizioni McGraw-Hill
- Presso il Ce.Se.Di. della Provincia di Torino, via Gaudenzio Ferrari 1, Tel. 011 861 3604, sono a disposizione dei docenti vari sussidi didattici utili per l'insegnamento della matematica e delle scienze più in generale.
- http://www.google.com/ è un ottimo motore di ricerca per le ricerche matematiche in internet.
- "Navigando nella Matematica" guida ai siti web matematici a cura di M. Costanzo e M. Garetto del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino. Lo si può scaricare in formato PDF (Acrobat Reader) all'indirizzo http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/garetto/sis2001.html
- "Palestra di Matematica" è il sito di G.M. Giani e A. Penta che illustra le loro esperienze di laboratorio matematico presso il liceo scientifico "E. Majorana" di Moncalieri (To). Lo si trova all'indirizzo http://www.geocities.com/palestra_matematica/
- Federico Peiretti , *Il gioco della Matematica* Conferenza **Mathesis** del 25/2/99 , in Conferenze Mathesis 1998/99 - alcune interessanti considerazioni sulla matematica.
- Federico Peiretti , *Biblioteca Matematica 2000,* Conferenza **Mathesis** del 6/5/99 , in Conferenze Mathesis 1999/2000 - un elenco commentato di libri di matematica.

  L'indirizzo web della Società Mathesis è http://www.dm.unito.it/mathesis/mathesis.htm