Momenti di svolta nello sviluppo del pensiero matematico

La scoperta del metodo assiomatico: Euclide, Hilbert, Gödel

(lezioni di Modena, ottobre-dicembre 2006)

Gabriele Lolli

Dipartimento di Matematica, Torino

Programma dei sei incontri

1. Il metodo ipotetico-deduttivo di fine Ottocento
2. Da Euclide a Hilbert
3. Il problema della completezza
4. La nozione di “formale”
5. Incompletezza e indecidibilità
6. La metamatematica

Indice

I temi trattati in questi incontri sono quelli del volume *Da Euclide a Gödel*[1], presentati per ragioni di tempo e di forma in un ordine e con enfasi differente.

Se in queste lezioni parliamo dell'assiomatica, non è per suggerire che questo metodo riassuma o coinvolga tutti gli aspetti del pensiero matematico. La scelta dipende dalle competenze di chi parla, anche se ci sono validi motivi per giudicare che il metodo assiomatico, in particolare dopo la svolta di fine Ottocento, sia un elemento fondamentale per capire la natura della matematica. Ma non bisogna pensare che sia l'unico; in particolare proprio a fine Ottocento la codifica moderna del metodo assiomatico è stata accompagnata da un'altra concezione, il riduzionismo collegato alla teoria degli insiemi, che spinge in un'altra direzione (allora si contrapponeva il metodo genetico al metodo assiomatico) e ancora è considerato un'alternativa; la conciliazione pratica che si è realizzata attraverso il silenzio è fortemente insoddisfacente, a uno spirito critico.

La riflessione che segue dunque non deve essere interpretata come un invito a pensare la matematica come un insieme di sistemi assiomatici, tanto meno nell'insegnamento.

Tuttavia il fatto che si debba spaziare su più di duemila anni di storia per capire in cosa consista il metodo assiomatico dovrebbe di per sé suggerire che si tratta di una conquista sofisticata e faticosa, e che merita di essere conosciuta bene, almeno da parte di chi si occupa di matematica. Quello che si intende normalmente quando si parla dell'importanza di vedere una situazione in termini assiomatici è solo l'attitudine a isolare bene le assunzioni rilevanti. Lo storico E. T. Bell diceva che quello che aveva imparato da Euclide era che senza assunzioni non c'è dimostrazione - un po' poco[2]

La parla "svolta" potrebbe essere sostituita da altre, come "rivoluzione", o "frattura" o "progresso": ma non vogliamo entrare in una discussione di filosofia della storia. Piuttosto dobbiamo imparare a capire perché in determinati momenti si senta la necessità da parte dei matematici di elaborare

[1] G. Lolli, *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino, Bologna, 2004.

[2] Anche un ottimo matematico e scrittore di matematica come Ian Stewart, nel suo recente *Com'è bella la matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2006, quando parla degli assiomi dice che gli assiomi si Euclide si possono accettare o no, se si crede: "Euclide vuole semplicemente rendere esplicite le regole del suo gioco" (pag. 76). Euclide non aveva letto Wittgenstein. Valenti matematici quando parlano di questioni fondazionali si esprimono in modo così *casual*, perché ritengono di poterle capire senza studiare; l'impressione che danno è come minimo quella di un difetto di stile e di eleganza.

considerazioni metodologiche, invece che, o oltre a fare matematica, e in risposta a quali problemi quelle considerazioni abbiano prodotto quello hanno prodotto.

Partiremo dalla descrizione del metodo assiomatico come viene codificato nel cosiddetto metodo ipotetico-deduttivo di fine Ottocento. Esso rappresenta in effetti una svolta, ed è a questa che si riferisce Dieudonné quando afferma che "ad ogni matematico che abbia a cuore la probità intellettuale s'impone ormai la necessità assoluta di presentare i propri ragionamenti in forma assiomatica ... con parole che si sono svuotate di ogni significato intuitivo"[3].

Si presenterà quindi la giusta curiosità di sapere cosa e come facevano prima i matematici, poi anche di cosa e come hanno fatto dopo.

Si può anticipare che guardando al passato possono sorgere perplessità sulla dichiarazione di svolta, perché la presentazione della matematica occidentale è sempre stata legata a un cosiddetto metodo assiomatico risalente ad Euclide. Esso tuttavia era diverso nella sostanza, se non nella terminologia, da quello contemporaneo. Ma doveva essere causa di una coscienza infelice[4] perché tale presentazione, o immagine, o meglio l'ideale e il modello di riferimento assiomatico non corrispondeva per nulla alla pratica, alla reale dinamica della scoperta e dello studio di nuova matematica.

I vari punti che si devono chiarire allora, per avere una visione corretta e coerente, anche se non completa, dello sviluppo della matematica, sono, almeno, i seguenti:

1. Il metodo assiomatico di Euclide, e la sua novità rispetto a una matematica che aveva comunque dietro le spalle alcuni secoli di sviluppo.

2. Quello che restava fuori, già allora, dal quadro euclideo, e quello che entrando in seguito a far parte della matematica è cresciuto ed è stato riconosciuto valido e corretto, e di fatto accettato come matematica, anche al di fuori dell'impianto assiomatico.

3. Cosa è che manda in crisi una pratica comunque feconda e che era stata capace fino ad allora di ignorare o scantonare dalle lacune della sua organizzazione.

[3]J. Dieudonné, "Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques", in *Les grands courants de la pensée mathématique*, a cura di F. Le Lionnais (1948), seconda edizione arricchita Paris, A. Blanchard, 1962, pp. 543-55, cit. p. 544.

[4]In senso hegeliano, cioè per lo Spirito, non per i singoli.

4. Perché questa crisi porta proprio alla particolare riformulazione del metodo assiomatico che ci ritroviamo, in un modo che non è tanto diverso dal punto di vista esteriore, ma con sostanziali differenze di concezione, e quali.

5. Cosa si può dire sulle aspettative dei matematici di fine Ottocento e sulla matematica in genere quando con gli strumenti logici si può incominciare a fare uno studio metamatematico delle teorie assiomaticamente organizzate. Risulterà infatti che il ripensamento dell'organizzazione assiomatica rende più evidenti i legami con la logica formale, e che questa nello stesso periodo si attrezza per affrontare lo studio delle teorie assiomatiche.

Come si evince da quanto premesso, non trattiamo questi temi nell'ordine temporale. Iniziamo dalla svolta di fine Ottocento perché è quella che si fa sentire ancora oggi, e perché la si può seguire bene, nel contesto dello sviluppo della matematica, sulla base solo delle nostre conoscenze scolastiche. Di solito si parte da Euclide, ma Euclide non è il *big bang*: la sua svolta rispetto alla matematica precedente, greca e orientale, è stata forse ancora più rivoluzionaria di quella moderna, ma è un mistero: a parte che è difficile da analizzare se non si conosce la matematica pre-euclidea, a partire dai Pitagorici, e senza prendere in esame anche il contesto filosofico, resta comunque in definitiva inspiegata.

Accenneremo anche brevemente alla alternativa del metodo genetico, e alle critiche di coloro che rifiutano l'assiomatica come sistemazione definitiva della matematica.

Come riferimenti bibliografici indichiamo per la storia moderna e contemporanea i volumi di U. Bottazzini, *Il flauto di Hilbert*, Utet Libreria, Torino, 1990 e J. Dieudonné (a cura di), *Abrégé d'histoire des mathématiques*, 2 voll., Hermann, Paris, 1978.

1 Il metodo ipotetico-deduttivo

Il metodo assiomatico a proposito del quale Dieudonné afferma che si impone *ormai*[5] con necessità assoluta è piuttosto recente, per quanto l'informazione possa suonare sorprendente, a chi risulta nuova: risale a poco più di cento anni fa.

Presentiamo la nascita e la formulazione di questa impostazione con le parole di Federigo Enriques, non tanto per ricorrere ad un argomento *ad auctoritatem*, quanto perché ci sembra la presentazione più chiara che sia stata data, e da un matematico attivo, che colloca questo sviluppo nelle esigenze della crescita della matematica del secolo decimonono.

Enriques svolge le sue considerazioni nel volume *Per la storia della logica*, del 1922[6]; con "logica" Enriques non intende la logica formale, ma la teoria della scienza, o la metodologia, in particolare delle scienze dimostrative, cioè della matematica.

Afferma Enriques che lo sviluppo della logica anteriore al secolo decimonono non ha mutato, apparentemente, il concetto tradizionale dell'ordinamento delle scienze dimostrative, ma "ora [seconda metà dell'Ottocento] accade che la riforma della logica, lungamente preparata, maturi qui, sotto l'impulso di diversi motivi, attinenti allo sviluppo delle Matematiche".

Le spinte che hanno portato a quella che Enriques chiama "riforma della logica", o anche "dell'ordinamento della scienza deduttiva", sono "alcuni movimenti di pensiero, di origini in gran parte distinte che pure interagiscono e si incontrano, in un medesimo concetto riformatore".

Enriques indica:

1. il nascere della geometria proiettiva;
2. le geometrie non euclidee;
3. l'algebra simbolica inglese;
4. l'interpretazione positivista delle teorie fisiche come modelli;
5. il lavoro volto a "dare solido fondamento all'Analisi, superando le difficoltà ormai mature del Calcolo infinitesimale e sciogliendo i paradossi

[5] C.vo nostro.

[6] F. Enriques, *Per la storia della logica*, Zanichelli, Bologna, 1922, ristampa anastatica 1987. Parafrasiamo e citiamo dal Cap. III, dal paragrafo 20 in avanti.

offerti dalle serie divergenti, le pseudo-dimostrazioni dei massimi e minimi, delle derivate ecc.", vale a dire il processo noto come *aritmetizzazione* dell'Analisi e, "in margine all'accennato movimento", l'analisi dell'infinito, con il che Enriques intende la teoria degli insiemi di Cantor e Dedekind;

6. ma "la riforma della logica contemporanea si afferma pienamente soltanto attraverso la *critica più recente dei principi della geometria*, per la quale i pensatori matematici acquistano coscienza matura del significato di una rivoluzione compiuta nei secoli".

Non tutti sono d'accordo con quest'ultimo giudizio di Enriques, per alcuni l'algebra astratta, di cui parleremo, è stata un fenomeno più decisivo, ma Enriques era un geometra, e gli si può concedere un pregiudizio settoriale. Comunque il suo giudizio è politicamente efficace, e accettabile, se non del tutto storicamente corretto: è importante che egli radichi in modo convincente la rivoluzione nel filone di quella che si chiama *mainstream* della matematica.

L'algebra, quella di cui parleremo, non quella che era inglobata nell'Analisi, era allora marginale - come lo è anche talvolta la sua discendente, algebra astratta, in giudizi recenti - al punto che chi la coltivava doveva impegnarsi a confutare la "tendenza ... a rifiutare il punto di vista che considera l'Algebra come una scienza, *in qualche senso analoga alla geometria*, e [la tendenza] ad adottare una o l'altra di due diverse concezioni, che considerano l'Algebra come un'*Arte*, oppure come un *Linguaggio*: come un Sistema di Regole, oppure come un Sistema di Espressioni, ma non come un Sistema di *Verità*[7].

Passiamo brevemente in rassegna, sia con le parole di Enriques, sia con qualche integrazione, ciascuna di queste novità della matematica dell'Ottocento. L'elenco non esaurisce tutte quelle rilevanti, ad esempio si potrebbe accennare alla storia della teoria degli invarianti, ma si tratta senza dubbio delle più importanti, e già così il loro intreccio è sufficientemente complicato.

---

[7]W. R. Hamilton, "Theory of conjugate functions or algebraic couples, with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time", *Trans. Royal Irish Acad.*, 17, 1837, pp. 293 - 422; passi scelti riprodotti in W. Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert*, Clarendon Press, Oxford, 1996, vol. I, pp. 362-441.

1.1 La geometria proiettiva

La nuova disciplina cresce a partire dall'inizio dell'Ottocento, con Monge e Poncelet, dopo qualche anticipazione in Desargues e Pascal. Enriques dà grande importanza al principio di dualità di Gergonne (1819).

Gergonne osserva che i teoremi della geometria di situazione (non metriche) si presentano a coppie e si scambiano uno nell'altro scambiando punti con rette nel piano o punti con piani nello spazio, rette invariate.

Già altri prima di lui avevano notato la possibilità di ottenere un risultato da un altro, ad esempio Brianchon (1806) aveva dedotto il teorema sull'esagono circoscritto ad una conica da quello di Pascal sull'esagono inscritto[8], con una trasformazione polare della figura. Gergonne fu anzi accusato di plagio per essersi attribuito il merito dell'osservazione della dualità. Poncelet sosteneva che la spiegazione della dualità stava nella relazione polo-polare da lui messa al centro delle sue indagini.

Gergonne osserva anche che "esiste per di più tra le dimostrazioni di una stessa coppia la stessa corrispondenza che tra i loro enunciati". Secondo Enriques Gergonne mostra tuttavia solo lo sviluppo parallelo dei primi teoremi, ma non spinge l'analisi a mostrare che si ha un sistema di postulati sufficiente a edificare la geometria di situazione.

Il ragionamento di Gergonne presuppone lo sviluppo successivo della geometria proiettiva a opera di Staudt (1847), che la rende indipendente da nozioni metriche ancora mescolate fino ad allora con quelle di situazione. Ancora più importante è stata l'introduzione delle coordinate di Plücker.

"Plücker fa riposare la legge di dualità sulla considerazione delle coordinate di rette e di piani, che permette un identico trattamento analitico delle relazioni correlative: le proprietà analitiche delle terne di numeri (x, y, z) si rispecchieranno, sia nelle figure dello spazio dove codeste terne vengano prese come coordinate dei loro elementi generatori 'i punti', sia nei sistemi di cerchi del piano, qualora gli stessi numeri vengano assunti come coefficienti dell'equazione di un cerchio, ossia come coordinate di cerchi ecc."

Dagli elementi di proiettiva è noto che nell'equazione $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$ di una retta del piano la completa simmetria di u_i e x_i permette di considerare le u_i come variabili e le x_i come coefficienti, e l'equazione come rappresentante il fascio di rette per il punto $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$.

[8] Il teorema di Pascal afferma che dato un esagono inscritto in una conica, i tre punti di intersezione delle coppie di lati opposti sono allineati; il teorema di Brianchon, per un esagono circoscritto, afferma che le tre diagonali principali si incontrano in un punto.

A Gergonne si deve anche il primo uso, e menzione, della nozione di "definizione implicita", che arricchisce il dibattito sulla natura delle definizioni, ferma alla distinzione tra definizioni reali e definizioni nominali della tradizione filosofica, con pochi arricchimenti. La nozione servirà a spiegare, non senza contrasti, il tipo di definizione offerta dai sistemi di postulati, se di definizione si tratta, in sostituzione delle definizioni reali della pratica precedente.

Secondo Enriques "la teoria della definizione implicita d'un sistema di concetti per mezzo di un sistema di proposizioni, è divenuta essenziale per la logica contemporanea. Ma essa non avrebbe potuto apparire nella luce in cui oggi la vediamo, se non risultasse chiarita da quel principio generale di sostituibilità dei concetti, che ha il suo germe nel principio di dualità della geometria proiettiva". Il principio di sostituibilità dei concetti, come vedremo, è ciò che rende possibili diverse interpretazioni per uno stesso sistema di assiomi.

1.2 Le geometrie non euclidee

Va da sé che le geometrie non euclidee, che rappresentano "una *possibilità* geometrica che non si accorda con la nostra intuizione dello spazio", hanno reso impossibile continuare a pensare che i concetti della geometria fossero legati allo spazio. Per Enriques è un colpo mortale per il razionalismo, in quanto sono la prova che la realtà non può essere determinata *a priori* ma solo con una verifica sperimentale. I concetti geometrici euclidei sono eventualmente legati solo alla nostra intuizione dello spazio; si tratta di un'intuizione di esseri limitati e condizionati dalla loro natura fisica e biologica e dalla loro situazione particolare nel mondo.

Enriques non si sofferma molto su questo sviluppo, se non per ricordare la ricerca di possibili interpretazioni concrete per le geometrie non euclidee, suggerita da Riemann e messa in atto da Beltrami[9], ad esempio con la pseudosfera[10]: "da questo lavoro ... si svolge, in tutta la sua pienezza, il concetto

[9]E. Beltrami, "Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea", *Giornale di matematiche ad uso degli studenti*, vol. 6, 1868, pp. 284-312.

[10]Ricordiamo che Beltrami ottenne con superfici a curvatura costante negativa modelli di una porzione del piano iperbolico di Lobachevski. Klein nel 1871 descrisse il modello nel quale i punti sono i punti interni a una circonferenza e le rette sono le corde. Poincaré nel 1882 descrisse due modelli: nel primo i punti sono i punti interni a una circonferenza e le rette sono gli archi di cerchio perpendicolari al contorno e i diametri; nel secondo i

della *geometria astratta*, in cui si può ravvisare il naturale prolungamento del principio di dualità guadagnato nella geometria proiettiva, ed anche il preludio immediato della nuova concezione del *sistema ipotetico-deduttivo*, accolta nella logica contemporanea".

1.3 L'algebra simbolica

Nel corso dell'Ottocento sono elaborate, soprattutto in Inghilterra, nuove teorie algebriche, il cui oggetto non sono i numeri.

Per Enriques si tratta di "una pluralità di indirizzi apparentemente senza un criterio direttivo, con le Matematiche che affermano il diritto ad esistere come dottrina pura, indipendente dalle applicazioni alla scienza naturale".

Qualche criterio tuttavia si distingue; le nuove teorie non sono frutto di decisioni arbitrarie - se mai in matematica lo sono - ma rispondono a esigenze interne alla crescita della matematica. Particolarmente influente si rivela una serie di osservazioni, espresse da varie parti, sul calcolo delle operazioni.

Si notavano ad esempio analogie tra potenze, derivate e altre operazioni, come l'iterazione di una funzione, del tipo

$$x^n \cdot x^m = x^{m+n}$$
$$f^n(f^m(x) = f^{m+n}(x)$$
$$\tfrac{d^n}{dx^n}\left(\tfrac{d^m y}{dx^m}\right) = \tfrac{d^{n+m}y}{dx^{n+m}}$$

Nel concentrarsi sullo studio di queste analogie, si parlava di un "principio di separazione dei simboli di operazione da quelli di quantità"[11], e si vedeva l'algebra sempre più orientata ai primi.

Dal principio di separazione dei simboli di operazione molti "furono condotti all'idea che non era la natura degli oggetti in esame che era la più significativa, ma piuttosto le leggi di combinazione dei loro simboli"[12].

Per questo salto non erano ovviamente sufficienti le osservazioni di analogie formali, ma agivano altri stimoli. Fino ad allora la matematica era

punti sono i punti di un semipiano e le rette sono o gli archi di cerchio ortogonali alla retta che delimita il semipiano e le rette perpendicolari. La geometria ellittica di Riemann ha un modello sulla superficie sferica.

[11] D. Gregory, "On the real nature of symbolical algebra", *Trans. Royal Society Edimburgh*, vol. 6, 1840, pp. 208-16, parzialmente riprodotto in Ewald, cit.

[12] E. Koppelman, "The calculus of operations and the rise of abstract algebra", *Archive of History of Exact Sciences*, 8, 1972, pp. 155-242.

ancora definita come la scienza delle grandezze, o delle quantità. Ci sono varie specie di quantità, tutto ciò che è passibile di crescere o di diminuire, così tante che non è possibile enumerare tutte, "e questa è l'origine dei vari rami della matematica, ciascuno interessato a un particolare genere di grandezza" diceva Eulero[13]. Anche Gauss era dell'idea che "la matematica insegna in effetti verità generali sulle relazioni tra quantità"[14]; benché affermasse che "i matematici fanno completamente astrazione dalla natura degli oggetti e dal significato delle loro relazioni; non c'è che da enumerare queste relazioni e confrontarle tra loro"[15], Gauss intendeva forse che nella matematica restasse solo l'aspetto numerico o geometrico delle relazioni tra gli oggetti.

A scuotere queste credenze tramandate contribuiscono diversi fattori. Non è da trascurare il lavoro fatto sui tradizionali sistemi di algebra; Lagrange si era accorto che la regola dei segni nella estensione delle operazioni agli interi era una conseguenza della legge distributiva. Proprio i numeri negativi erano una spina nella ripetuta concezione delle quantità. La sistemazione dei numeri negativi e di quelli immaginari proponeva il problema delle regole da assumere nel calcolo. La presentazione di Lagrange del calcolo infinitesimale era essenzialmente algebrica, ancor più di quanto potessero suggerire le leggi delle derivate.

In Inghilterra all'inizio dell'Ottocento si forma un movimento per svecchiare la matematica legata a Newton e chiusa agli sviluppi del continente, dove con le notazioni di Leibniz prevaleva l'aspetto algebrico su quello geometrico delle flussioni; ma su molte questioni il modo di procedere dei continentali era per altri versi approssimativo e insoddisfacente, addirittura a proposito dei numeri.

Un personaggio come Cauchy si esprimeva ancora dicendo che "le grandezze che servono per aumentare sono indicate da numeri preceduti dal segno $+$, e le grandezze che servono come diminuzione sono indicate da numeri preceduti dal segno $-$ ... e i simboli $+$ e $-$ messi davanti a numeri si concepiscono come aggettivi posti davanti ai nomi"[16]. Si usavano locuzioni inconsistenti

---

[13]L. Euler, *Vollständige Anleitung zur nieder und höheren Algebra*, 1770, trad. inglese *Elements of Algebra*, Springer, New York, 1984, pag. 1.

[14]C. F. Gauss, "Fragen zur Metaphysik der Mathematik", *Werke*, X/1, Gottingen, 1870-1933, pp. 396-7, parzialmente riprodotto in Ewald, cit.

[15]C. F. Gauss, *Werke*, II, pag. 176.

[16]G. Peacock, *Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis*, The Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science, Cambridge 1833, London 1834, pp. 185-352, cit. p. 193.

come "sottrarre una grandezza maggiore da una minore" per spiegare la generazione dei numeri negativi. Si collocavano i negativi dopo $+\infty$, in base al principio che siccome dividendo un numero per numeri positivi sempre più piccoli si avevano risultati sempre più grandi, quando si passava a numeri ancora minori, i negativi, minori di 0, il risultato doveva essere maggiore dell'infinito. Le incertezze sui numeri immaginari si riflettevano su rinnovati dubbi sui numeri negativi (le "false" soluzioni).

Dei numeri immaginari si avevano solo interpretazioni geometriche, a opera di Argand (1806) e Gauss (1831). In alternativa altri, come F.-J. Servois (1767-1847) affermavano che l'unica legittimazione degli immaginari era la loro utilità nei calcoli, e quindi potevano restare e restavano senza interpretazione.

All'interno del movimento per la riforma dell'Analisi, la "Analytical Society", George Peacock si dedica a correggere la tradizionale avversione inglese per l'algebra con una trattazione sistematica dei suoi principi. Nel 1833 propone una distinzione tra algebra aritmetica e algebra simbolica. Nell'algebra aritmetica le variabili rappresentano numeri reali positivi e le operazioni si assumono nel senso ordinario. Nell'algebra simbolica si elimina ogni restrizione, sia sulle variabili sia sulle operazioni (ad esempio che la sottrazione si possa eseguire solo se il minuendo è maggiore del sottraendo). Le regole a cui sono soggette le operazioni sono libere dalle restrizioni delle loro definizioni, definizioni che alcune volte mancavano o erano solo geometriche.

Nell'algebra simbolica le operazioni si potevano definire in base al *popular meaning*, ma questo non rappresentava né una deduzione delle stesse né una loro fondazione, quanto solo un suggerimento; poi erano soggette solo alle condizioni simboliche: "Il significato delle operazioni eseguite, così come i risultati ottenuti ... deve essere derivato non dalle loro definizioni o dai significati assunti" ma dalle regole postulate[17]. I risultati ottenuti potevano essere applicati all'algebra aritmetica attraverso una interpretazione. Ma le loro manipolazioni erano più estese, e magari ne venivano conclusioni che nell'interpretazione non erano possibili.

Qualche volta Peacock accenna alla possibilità di un sistema di algebra simbolica che non abbia alcuna interpretazione, ma benché lo dichiari ammissibile lo ritiene di scarso interesse, e considera l'algebra aritmetica una fonte di ispirazione. Quando l'interpretazione sussiste, deve esserci perfetta consonanza tra algebra simbolica e aritmetica, requisito che Peacock chia-

[17]G. Peacock, *Report on the recent progress ...*, cit.

ma “principio di permanenza di forme equivalenti”, e che gli impedisce di prendere in considerazione vere deviazioni dall’algebra aritmetica.

Più coraggioso, il suo allievo Gregory si spinge oltre. Gregory usa davvero nelle espressioni le lettere non solo per i numeri ma per operazioni qualunque, ponendole nelle posizioni dei numeri. Egli scrive ad esempio

$$f(x+h) = e^{h\frac{d}{dx}} f(x)$$

grazie al fatto che

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \dots.$$

In modo coerente, nel considerare leggi come $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e $(a^m)^n = a^{mn}$ Gregory passa a discutere quale senso di può dare a $(+)^m$ e $(-)^m$ quando m sia non solo un numero razionale qualunque, ma anche a sua volta un simbolo di operazione, come $(+)^{log}$, pur ammettendo di non avere ancora la risposta.

Tra gli esempi dell’effetto del principio di separazione, Gregory propone

$$(1.) FF(a) = F(a) \quad (2.) ff(a) = F(a)$$

$$(3.) Ff(a) = f(a) \quad (4.) fF(a) = f(a)$$

e osserva che tra le operazioni aritmetiche, due soddisfano le leggi elencate, quelle indicate dai simbolo $+$ e $-$; ma esistono anche due operazioni geometriche soggette alle stesse leggi: Gregory si esprime in modo fantasioso, come “il girare di un punto per una circonferenza”, ma sembra di capire che si tratti di una rotazione rispettivamente di 360° e 180° gradi. “Non esiste alcuna analogia reale tra le due operazioni aritmetiche e le due operazioni geometriche ... in quanto le due operazioni non si possono neanche considerare l’una l’opposta dell’altra [in geometria]. La relazione che esiste è dovuta non a una identità della loro natura, ma al fatto di essere combinate tra loro dalle stesse leggi”.

Gregory ripete da Peacock che “l’algebra simbolica è la scienza che tratta la combinazione di operazioni definite non dalla loro natura [...] ma dalla leggi di combinazione alla quale sono assoggettate”[18].

Le definizioni sono diverse dalle regole. “Un simbolo è *definito* quando sono esplicitate per il suo uso regole che ci permettano di accettare o rifiutare qualsiasi proposta trasformazione che lo coinvolge. Un simbolo semplice è

[18] Gregory, cit.

spiegato quando ad esso è assegnato un significato che ci permetta di accettare o rifiutare l'applicazione della sua definizione, come conseguenza di quel significato"[19].

In questa prospettiva si moltiplicano le algebre.

William Hamilton propone nel 1837 un'algebra di coppie per i complessi, ma basata su un sistema simbolico di enti che interpreta come istanti temporali[20]. Boole costruisce nel 1847 la sua algebra per le leggi del pensiero.

Ogni algebra è una scienza dei simboli costruita con le sue regole, e poi applicata con un'interpretazione.

Con l'affermarsi dell'autonomia degli apparati simbolici diventa scottante il problema del significato. Ma i protagonisti non hanno una lucida consapevolezza metodologica immediata e non lanciano un chiaro programma; sono vincolati dalla saggezza ricevuta.

"Nessun algebrista della scuola di Cambridge sembra ammettere l'idea di una struttura algebrica che non sia concepita in rapporto a un'interpretazione privilegiata"[21].

Hamilton ricorda di essersi interessato alla dottrina dei numeri negativi e immaginari perché, d'accordo con quelli che ritenevano che non si potessero considerare quantità, era insoddisfatto di ogni spiegazione che non desse loro, dall'inizio, una chiara interpretazione un significato.

Hamilton arriva addirittura a insistere, pur nel contesto simbolico, che l'algebra abbia un suo oggetto che la caratterizza come scienza.

"Si potrebbe provare un naturale rimpianto, [per] il destino dell'Algebra, se uno studio che impegna sempre di più i matematici, al punto da aver quasi sopravanzato lo Studio della Scienza Geometrica, si trovasse alla fine a non essere per nulla lo Studio di una Scienza, in ogni senso stretto e proprio ... Spera perciò di incontrare comprensione chiunque voglia indagare se l'Algebra esistente, nello stato in cui è stata sviluppata dai maestri delle sue regole e del suo linguaggio, non offra invero alcun rudimento che possa incoraggiare una speranza di sviluppare una Scienza dell'Algebra: una

[19] A. De Morgan, "On the foundation of algebra", *Trans. Cambridge Philosophical Society*, vol. 7, 1842, pp. 173-87, parzialmente riprodotto in Ewald, cit.

[20] W. R. Hamilton, "Theory of conjugate functions or algebraic couples" cit. $A < B$ significa che l'istante A precede l'istante B, la coppia $\langle A, B \rangle$ denota un intervallo: Hamilton costruisce così i numeri naturali, che chiama "ordinali".

[21] M. Mugnai, "Alle origini dell'algebra della logica", in V. M. Abrusci, E. Casari, M. Mugnai (a cura di), *Atti del Convegno Internazionale di Storia della Logica*, CLUEB, Bologna, 1983, pp. 117 - 31.

scienza propriamente così chiamata; rigorosa, pura e indipendente; dedotta con ragionamenti validi dai suoi principi intuitivi; e perciò oggetto di una contemplazione a priori non meno della Geometria, né meno distinta, nella sua essenza, dalle Regole che può insegnare o usare, e dai Segni con i quali può esprimere il suo significato. L'Autore di questo saggio è pervenuto alla convinzione che tale rudimento consista nella Intuizione del Tempo"[22]. L'oggetto dell'algebra per Hamilton non è la quantità, quanto l'Ordine in Progressione.

La pretesa di trovare un oggetto per l'Algebra si scontra tuttavia con la moltiplicazione dei sistemi algebrici devianti rispetto a quello dell'algebra aritmetica.

Si capisce l'importanza che in questo clima ha avuto la scoperta dei quaternioni da parte di Hamilton stesso nel 1843: un sistema di enti $a+ib+jc+kd$ con

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Il sistema dei quaternioni smentiva l'idea che un sistema di numeri debba necessariamente comportare una moltiplicazione commutativa. Hamilton voleva definire attraverso di essi le rotazioni nello spazio, come i complessi forniscono le rotazioni nel piano. I quaternioni ebbero una certa importanza nella nascita dell'analisi vettoriale, anche se meno delle speranze del suo inventore.

Nello stesso tempo, o poco dopo, si scopriranno vari tipi di prodotto tra vettori, tra cui il prodotto esterno, con Grassman (1844), le matrici con un'altra moltiplicazione non commutativa[23], i divisori dello zero nei biquaternioni[24], una moltiplicazione neanche associativa negli ottetti, o ottave, di Grave e Cayley, coppie di quaternioni, con una moltiplicazione $\langle q_1, q_2\rangle\langle q_3, q_4\rangle = \langle q_1q_3 - \overline{q}_4q_2, \;\; q_2\overline{q}_3 + q_4q_1\rangle$, dove $\overline{q}$ è il coniugato di q.

Verranno poi le algebre di Clifford, sistemi dove si parte da n unità $1, e_1, \ldots, e_{n-1}$ con $e_i^2 = -1$ e $e_ie_j = -e_je_i$ e per ognuno dei 2^n sottoinsiemi di n di pone $e_H = e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_h}$ con $i_1 < \ldots i_h$, ottenendo una moltiplicazione associativa.

[22] W. R. Hamilton,"Theory of conjugate functions or algebraic couples" cit.

[23] A proposito delle matrici, occorrerebbe ricordare l'importante sviluppo matematico della teoria degli invarianti, con i suoi legami con la geometria

[24] Sono i quaternioni definiti sul corpo base $\mathbb{C}$ invece che $\mathbb{R}$; il sistema equivale a quello delle matrici di ordine 2 su $\mathbb{C}$, come osservato da Cayley e Peirce.

Questi sistemi non nascono tutti per decisioni volontaristiche, ma nella ricerca di strumenti per la soluzione di problemi matematici.

Fino a metà del secolo, gli unici gruppi finiti che si considerano sono quelli di permutazione, in connessione alle ricerche sulla soluzione delle equazioni algebriche; nel 1854 Cayley darà la prima definizione moderna di gruppo astratto finito[25].

Non ha più tanto senso continuare a usare i vecchi simboli $+$ e $\cdot$. Nel 1867 Hankel introdurrà la nozione astratta di legge di composizione[26]. Un'anticipazione di questo termine era apparsa nel 1822 a opera, anonima, di Gergonne.

Come nell'esperienza della geometria, ma in modo più marcato, nel campo dell'algebra si ha un duplice fenomeno. Da una parte compaiono diversi sistemi algebrici, dall'altra ciascuno di essi è passibile di tante interpretazioni.

In geometria, le interpretazioni sono inizialmente vissute secondo Enriques come un cambiamento di senso, un "leggere per", come dirà anche Beltrami.

Nell'algebra simbolica, ogni sistema è autonomo, e inizialmente ha la sua interpretazione privilegiata, ma "ogni interpretazione che non infici la verità delle relazioni supposte è ugualmente ammissibile"[27].

Alla fine del secolo, le interpretazioni diventeranno "sistemi di enti", o "insiemi", sui quali sono introdotte operazioni soddisfacenti determinate regole.

Gregory appare consapevole dei vantaggi del trasferimento di risultati da una interpretazione ad un'altra.

"Queste leggi sono state in molti casi suggerite ... dalle leggi delle note operazioni numeriche; ma il passo che è compiuto nel passaggio dall'algebra aritmetica all'algebra simbolica consiste in questo che, tralasciando la natura delle operazioni che i simboli usati rappresentano, noi supponiamo l'esistenza di classi di operazioni sconosciute soggette alle stesse leggi. Siamo allora in grado di provare certe relazioni tra le differenti classi di operazioni, che, quando sono espresse tra i simboli, sono chiamate teoremi algebrici. E se possiamo mostrare che certe operazioni di qualsiasi genere in una scienza sono soggette alle stesse leggi di combinazione di queste classi, i teoremi sono veri di esse, come incluse nel caso generale"[28].

[25] Per la definizione generale si deve aspettare il trattato di H. Weber del 1899.

[26] H. Hankel, *Théorie des systèmes de nombres complexes*, Voss, Leipzig, 1867.

[27] G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*, London - Cambridge 1847, p. 3.

[28] Gregory, cit.

De Morgan ha introdotto, come una battuta, la locuzione di "simboli svuotati di significato". Ma calcoli non interpretati significa per adesso solo che non ci si pensa.

Si intersecano allora due aspetti, quello del carattere formale delle regole o delle assunzioni, e quello del carattere formale del ragionamento, su cui torneremo; dopo un laborioso parto, si arriverà a riconoscere che in matematica: "Il ragionamento è formale nel senso che il significato delle proposizioni non entra assolutamente in questione"[29].

Questo è un filone che si potrebbe risalire all'indietro attraverso Condillac fino a Leibniz e forse più indietro ancora. Leibniz aveva riconosciuto la subordinazione "dell'algebra speciosa alla speciosa generale, della scienza delle formule significanti la quantità alla dottrina delle formule o espressioni in generale dell'ordine, della similitudine, della relazione"[30].

Condillac, in *La langue des calculs* aveva detto come quando si deve risolvere un'equazione come $x + a - b = c$ non abbiamo bisogno di sapere cosa indicano le lettere da cui è formata, e se lo sapessimo non ci penseremmo, e solo dopo mettiamo dei valori, e le operazioni per questo sono fatte in modo meccanico.[31].

Non sorprende quindi di ritrovarlo anche in campo geometrico. Poncelet si proponeva "di ridurre, in qualche modo, a un puro meccanismo, a una semplice sostituzione di nomi e lettere, scritti al posto l'uno dell'altro, la traduzione di tutte le proprietà ... che appartengono a una figura a alla sua reciproca" con trasformazione polare[32].

Gergonne teorizza in generale: "Si ripete in continuazione *che non bisogna ragionare su oggetti dei quali non sia abbia un'idea precisa*; e invece, nulla vi è di più falso. Si ragiona in effetti con le parole proprio come in algebra si calcola con le lettere; e come si può eseguire con precisione un calcolo ... senza interrogarsi ... sul significato dei simboli con i quali si opera, si può ... seguire un ragionamento senza conoscere ... il significato dei termini nei quali si esprime, o senza farvi caso se lo si conosce"[33].

---

[29] A. N. Whitehead, *A Treatise on Universal Algebra, with Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1898, p. vi.

[30] W. G. Leibniz, *Mathematische Schriften*, Gerhardt, vol. 7, p. 61.

[31] E. Condillac, *Oeuvres philosophiques*, Paris, 1827, pp. 325 - 77.

[32] Poncelet, in *Annales de Gergonne*, 1819.

[33] Gergonne, in *Annales de Gergonne*, 1827.

1.4 Il metodo ipotetico-deduttivo

Sul punto 4 di Enriques non ci soffermiamo. Sul 5 diremo dopo, ma per Enriques il più importante è il 6.

Dalle geometrie non euclidee e dalle geometrie iperspaziali sorge "il concetto generale di una *geometria astratta capace di ricevere diverse intepretazioni*. Virtualmente questo concetto sta già nella trattazione di Plücker e nelle sue coordinate".

Di qui, commenta Enriques, "la comparazione diretta di due ordini di proprietà geometriche, o di due geometrie, unificate nella rappresentazione analitica, conduce più avanti, invitando a *tradurre l'una nell'altra diverse forme di intuizione* ... In questo concetto è contenuta in germe la più larga estensione del principio di dualità, come 'principio delle infinite interpretazioni possibili di una geometria astratta' ".

In cosa consista il "nuovo concetto della scienza dimostrativa"[34] si può dire in modo semplice.

(a) Non si richiede più nessuna definizione reale, ma solo definizioni nominali, quindi alcuni concetti primitivi devono essere non definiti.

(b) I postulati sono enunciati come tali, nella forma di puri rapporti logici supposti tra i concetti primitivi.

La presentazione non sembra gravida di conseguenze, sembra quello che si è sempre normalmente inteso con metodo assiomatico, ma bisogna prestare attenzione ai termini usati, e a cosa si nasconde dietro "la forma di puri rapporti logici". Nell'esame di un sistema per la geometria proposto da Hoüel basato sul concetto di movimento, Enriques commenta:

"Se sono dati dei concetti primitivi $A, B, C, \ldots$, un postulato pone fra di essi una certa relazione $\varphi(A, B, C, \ldots)$: proviamo a tradurla, chiedendoci se sia vera o falsa per altre interpretazioni di $A, B, C, \ldots$ In generale *la traduzione non ha senso se la detta relazione fa appello direttamente al significato intuitivo di* $A, B, C, \ldots$ Come tradurremo, per esempio, i principi di Hoüel prescindendo dal significato specifico del 'movimento' come operazione fisica sulle figure?

La *forma logica* che si vuol dare ai postulati è precisamente quella di *relazioni aventi un significato indipendente dal particolare contenuto dei concetti*, cioè di relazioni affatto generali che possono sussistere fra 'enti astratti' ...

[34]Si veda Enriques, cit., Cap. III, paragrafo 29.

Si può dire che 'infiniti ordini di proprietà geometriche relative ad enti del nostro spazio euclideo, possono ritenersi come interpretazioni di una geometria non-euclidea o anche di una geometria a più di tre dimensioni'. Così nell'esempio di Beltrami, la geometria non-euclidea di una superficie piana si riflette nella geometria delle figure curvilinee tracciate sopra una superficie di curvatura negativa, dove la linea geodetica prende il posto della retta. E, secondo Klein, il sistema di rette dello spazio ordinario ci offre l'immagine di una varietà di second'ordine a quattro dimensioni, immersa in uno spazio lineare a cinque dimensioni[35].

Appunto con Klein e Lie il concetto della geometria astratta ha ricevuto un grande sviluppo, divenendo poi (dopo Segre) un ordinario istrumento di lavoro ... Infatti nulla è più fecondo che la moltiplicazione dei nostri poteri intuitivi recata da codesto principio: pare quasi che agli occhi mortali, con cui ci è dato esaminare una figura sotto un certo rapporto, si aggiungano mille occhi spirituali per contemplarne tante diverse trasfigurazioni ... "

Enriques mette dunque l'accento sulla possibilità, la desiderabilità e quasi la necessità di molteplici interpretazioni come significato o contropartita dei "puri rapporti logici", anche se viene ancora riconosciuto un particolare contenuto dei concetti, che tuttavia non deve comparire negli assiomi.

Il sistema dei postulati porge la definizione implicita dei concetti primitivi, come un sistema di equazioni limita il campo di variabilità delle incognite.

Anche Poincaré accetta le definizioni implicite per la geometria, benché ponga un limite, ad esempio le rifiuta come fondamento dell'aritmetica: "certi assiomi indimostrabili della matematica non sarebbero che definizioni mascherate. Questo punto di vista è spesso legittimo; io stesso l'ho ammesso per quanto riguarda ad esempio il postulato di Euclide. Gli altri assiomi della geometria non bastano per definire completamente la distanza; la distanza sarà allora, per definizione, tra tutte le grandezze che soddisfano gli altri assiomi, quella che è tale da rendere vero il postulato di Euclide"[36].

[35] Le rette dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$, ovvero di $\mathbb{C}^4$, sono individuate da due vettori $\langle a_0 : a_1 : a_2 : a_3 \rangle$ e $\langle b_0 : b_1 : b_2 : b_3 \rangle$ che danno origine alla matrice

$$\begin{bmatrix} a_0 a_1 a_2 a_3 \\ b_0\, b_1\, b_2\, b_3 \end{bmatrix}$$

i cui sei minori sono le coordinate di Plücker della retta, elemento di $\mathbb{P}^5$. I sei minori non sono indipendenti, e si scende a quattro dimensioni. Le relazioni tra sei numeri perché siano i minori di una simile matrice si esprimono con un'equazione di secondo grado.

[36] H. Poincaré, *Science et méthode*, Flammarion, Paris, p. 161.

Sul fatto che gli assiomi non descrivono una realtà anche Poincaré concorda, sia pure con una sua posizione originale, il convenzionalismo, che ha dato lo spunto a molte discussioni.

"Gli assiomi non sono giudizi analitici *a priori*, sono convenzioni ... La geometria non è una scienza sperimentale; l'esperienza non è che l'occasione per noi per riflettere su idee geometriche che preesistono in noi ... La nostra scelta non è imposta dall'esperienza, ma semplicemente guidata dall'esperienza. Ma resta libera: noi scegliamo questa geometria piuttosto che quest'altra non perché è più *vera*, ma perché è più *comoda*.

[...] Trasportati su un altro mondo, noi potremmo senza dubbio avere una geometria differente, non perché la nostra geometria avrebbe cessato di essere vera, ma perché sarebbe divenuta meno comoda di un'altra"[37].

Il primo lavoro in cui si adotta la presentazione rigorosa di un sistema ipotetico-deduttivo per la geometria è a giudizio di Enriques il trattato di Moritz Pasch[38], seguito da Peano e da altri.

"Per quanto ci è dato di giudicare, ricordando, il senso della forma logica dovette essere riguadagnato, come una *conquista personale*, forse da ognuno dei critici matematici appartenenti alla stessa generazione; sebbene non si possa escludere, in maniera assoluta, un'influenza generica, più o meno diretta, dei predecessori". In particolare "si deve ritenere che ancora abbia avuto a riguadagnarle per proprio conto David Hilbert ..."

Lo hanno riguadagnato nel lavoro sul campo, per il superamento dei loro problemi. Hilbert non voleva affatto costruire un monumento al metodo ipotetico-deduttivo, come la storia ha deciso; voleva studiare l'effetto dei vari assiomi, e di teoremi come quello di Pascal, e rendere indipendente la geometria dai numeri.

La maggior parte dei lavori che hanno costituito la "critica dei principi" non erano un esercizio in assiomatizzazione ma miravano a delineare bene i confini della geometria proiettiva (Pasch, Pieri). Il che testimonia comunque che prima del loro lavoro la geometria proiettiva non era svolta nell'ambito di un sistema assiomatico, questione sulla quale torneremo[39].

Ricordiamo l'esordio delle *Grundlagen del Geometrie* di David Hilbert, 1898. Hilbert non premette alla sua essenziale esposizione alcuna considerazione metodologica, ma esordisce con una definizione:

---

[37] H. Poincaré, "On the Foundations of Geometry", *The Monist* IX (1898), pp. 1-43.

[38] M. Pasch, *Vorlesungen über eine neuere Geometrie*, Lipsia, 1882.

[39] E le contese sui metodi da usare si cristallizzano nella contrapposizione tra metodi sintetici e metodi analitici, o Steiner-von Staudt *vs* Möbius-Plücker.

"Si considerino tre distinti insiemi di oggetti. Gli oggetti del primo insieme siano chiamati *punti* ...; gli oggetti del secondo insieme siano chiamati *rette* ...; gli oggetti del terzo insieme siano chiamati *piani* ...

Tra i punti, le rette e i piani si considera che sussistano certe reciproche relazioni e queste relazioni sono denotate da parole come "giacere", "tra", "congruenti". La descrizione precisa e matematicamente completa di queste relazioni segue dagli assiomi della geometria".

Poincaré, che a proposito dell'opera di Hilbert dirà "Ecco un libro di cui penso molto bene, ma che non raccomanderei a un liceale"[40], così commenta:

"Quello che ci colpisce subito nella nuova matematica è il suo carattere puramente formale: 'Pensiamo, dice Hilbert, tre generi di cose che chiameremo punti, rette e piani, conveniamo che una retta sarà determinata da due punti e che invece di dire che questa retta è determinata da quei due punti noi potremmo dire che ella passa per i due punti o che i due punti sono situati su tale retta'. Che cosa siano queste *cose*, non solamente non lo sappiamo, ma non dobbiamo neanche cercare di saperlo. Non ne abbiamo bisogno, e una persona che non avesse mai visto né punti, né rette, né piani potrebbe fare della geometria bene quanto noi. Che la parola *passare per* o la parola *giacere su* non provochino in noi nessuna immagine, la prima è semplicemente sinonimo di *essere determinata* e la secondo di *determinare* ...

Questo carattere formale della sua geometria, io non lo rimprovero a Hilbert. Era ciò a cui doveva tendere, dato il problema che si era posto. Egli voleva ridurre al minimo il numero degli assiomi fondamentali della geometria e farne l'enumerazione completa; ora, nei ragionamenti nei quali il nostro spirito resta attivo, in quelli nei quali l'intuizione gioca ancora un ruolo, in questi ragionamenti vivi, per così dire, è difficile che non si introduca un assioma o un postulato che passino inavvertiti. Solo dopo aver ricondotto tutti i ragionamenti geometrici a una forma puramente meccanica, egli ha potuto essere certo di essere riuscito nel suo intento"[41]

Con questo commento Poincaré mette in luce l'aspetto formale, e sposta il problema a come si ragiona.

Enriques non si era lasciato distrarre, da questa accusa o rischio di formalismo, da ciò che riteneva importante. Postasi la domanda "se la geometria non-euclidea o la geometria iperspaziale (indipendentemente dalla possibilità

[40]H. Poincaré, "Les définitions générales en mathématiques", *L'Enseignement mathématique*, VI, 1904, pp. 257-83.

[41]H. Poincaré, *Science et méthode*, p. 156.

metafisica che taluno può scorgervi) sia un puro schema di formule algebriche" aveva risposto con l'osservazione già sopra riportata che "infiniti ordini di proprietà geometriche relative ad enti del nostro spazio euclideo possono ritenersi come interpretazioni di una geometria non-euclidea o anche di una geometria a più di tre dimensioni"; egli metteva in luce cioè la ricchezza di interpretazioni associata al formale.

Altri ribadiranno questo aspetto, ciascuno con le sue particolari preoccupazioni ed enfasi. Mario Pieri[42] ad esempio è sulla linea di Enriques:

"La caratteristica più importante delle cose primitive di ogni sistema ipotetico-deduttivo è d'essere suscettibili di interpretazioni arbitrarie, entro certi limiti che sono indicati dalle proposizioni primitive ..."

Beppo Levi[43] aggiunge altre sfumature: "Un simbolo rappresenta un'idea primitiva sempre e solo quando è indeterminato il significato che gli compete: rappresenta un'idea derivata quando il suo significato resta individuato tosto che siano fissati i significati delle idee assunte come primitive". E insiste sulla "indeterminazione" del significato delle idee primitive: "è ben vero che un sistema dato di postulati può dare di una idea primitiva una determinazione, in rapporto ad altre idee, minore di quella che effettivamente si attribuisce a quel nome nel discorso comune: ma la vera e completa determinazione di una idea primitiva non è possibile, comunque complesso sia il sistema dei contrassegni che per essa si vogliano enunciare; noi non potremo mai identificare le idee, ma potremo solo affermare che tra esse sussistono certe relazioni".

Per Alessandro Padoa[44] invece la molteplicità di interpretazioni è solo una possibilità: "Può capitare che ci siano diverse interpretazioni del sistema dei simboli non definiti che verificano il sistema delle proposizioni non dimostrate, e dunque tutte le proposizioni di una teoria. Il sistema di simboli non definiti può allora essere considerato come l'*astrazione* ottenuta da tutte queste interpretazioni, e la *teoria generica* ... come l'astrazione di tutte le

[42]M. Pieri, "I principii della geometria di posizione composti in un sistema logico deduttivo", *Memorie R. Accad. Scienze di Torino*, ser. 2a, 48, 1899, pp. 1-62. Tra i teorizzatori del metodo assiomatico citiamo ora soprattutto geometri, e allievi della scuola di Peano, ma se ne potrebbero ricordare anche dal campo algebrico, soprattutto negli USA; alcuni saranno menzionati in seguito.

[43]B. Levi, Antinomie logiche, 1908, in *Opere scelte*, a cura dell'UMI, Cremonese, Roma, 1999.

[44]A. Padoa, "Essai d'une théorie algébriques des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque", *Bibl. Congrès Intern. de Philos., Paris, 1900*, A. Colin, Paris, vol. 3, 1900, pp. 309-65.

teorie specializzate che risultano dalla teoria generica per la sostituzione successiva dei simboli non definiti con ciascuna delle interpretazioni di questa teoria."

Per parte sua Pasch difende invece proprio il carattere formale delle dimostrazioni, riecheggiando gli algebristi inglesi:

"Occorre in effetti, perché la geometria diventi veramente una scienza deduttiva, che il modo nel quale si tirano le conseguenze sia ovunque indipendente dal *senso* dei concetti geometrici, come deve esserlo dalle figure; sono da prendere in considerazione solo i *rapporti* tra i concetti geometrici, posti dalle proposizioni e dalle definizioni adottate. Durante la deduzione, è certo permesso, ed è utile, pensare al significato dei concetti geometrici considerati, ma non è in alcun modo necessario; tanto è vero che è proprio quando diventa necessario che si manifesta il carattere lacunoso della deduzione e (quando non si può sopprimere le lacune modificando il ragionamento) l'insufficienza delle proposizioni invocate come strumento di prova".

Il requisito di cui parla Pasch discende dallo scopo prefisso: "Se si è dedotto ... un teorema da un gruppo di proposizioni - che chiameremo generatrici (Stammsätze) - il valore della derivazione sorpassa il suo scopo iniziale. Perché se si tira, da proposizioni generatrici, delle proposizioni corrette, cambiando i concetti geometrici con altri [...] si ottiene, senza ripetere la deduzione una proposizione [...] che è conseguenza delle trasformate delle proposizioni generatrici"[45].

Succede ora che le parole della lingua naturale, se usate, tendono a importare con sé nel linguaggio scientifico vecchi ricordi di relazioni usualmente implicate nelle abitudini degli scambi di pensiero in lingua corrente, e bisogna epurarne la scienza: "Anche se nessuna immagine sensibile è ammessa, e neanche una rappresentazione mentale di una tale immagine, l'uso di numerose parole, con le quali sono descritti i concetti geometrici più semplici esercita già in sé una certa influenza"[46].

Ne segue che l'uso della logica formale, o almeno il riferimento alla sua impostazione, diventa essenziale, come aveva intuito Poincaré, e come altri riconosceranno: se è vero che i sistemi deduttivi vanno riferiti a qualche dominio di conoscenze razionali o empiriche, tuttavia la perfezione ideale si ha se le conclusioni relative ai sistemi deduttivi sono stabilite per pura logica; oppure

[45] Pasch, cit.
[46] *Ibidem.*

il dominio può essere aritmetica o geometria, ma “senza ricorrere ad altro sistema ausiliario, di cui possa mettersi in dubbio l’esistenza matematica”[47].

[47] M. Pieri, “Circa il teorema fondamentale di Staudt e i principi della Geometria Proiettiva”, *Atti regia Accad. Scienze di Torino*, XXIX, 1904, pp. 313 - 31.