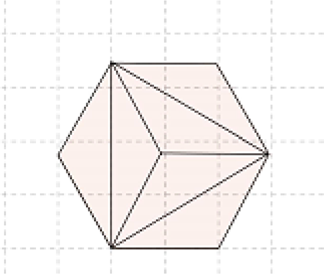
Fascia 15-16

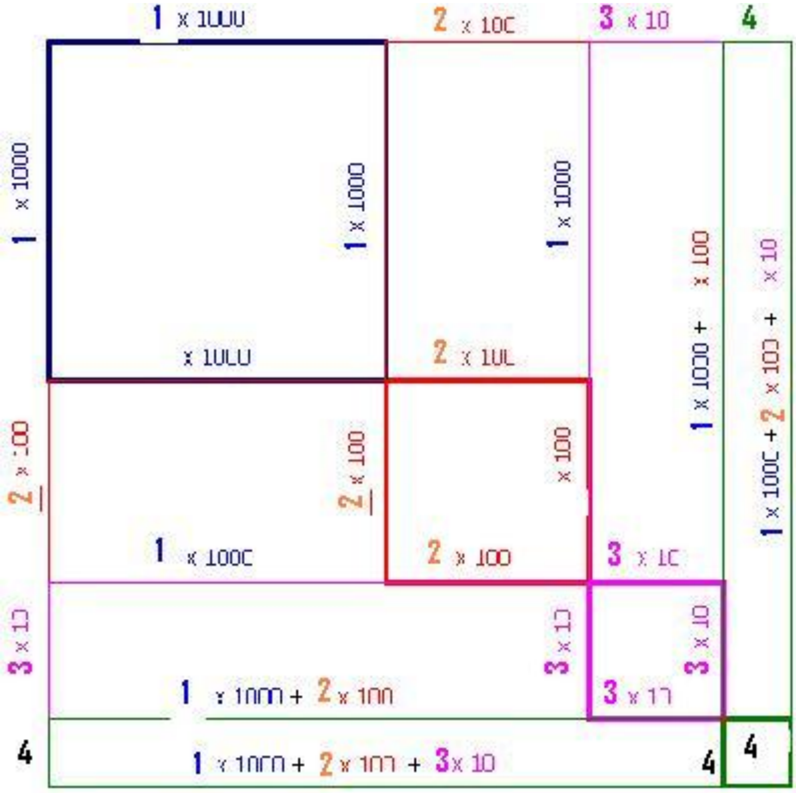
Soluzione del test 1 – Estensione del teorema di Pitagora



La superficie di un esagono regolare di lato *s* è pari a $3\sqrt{3}s^2/2$.
Detti *a* e *b* i ca teti e *c* l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, in base al teorema di Pitagora si ha $a^2+b^2=c^2$. Pertanto, la somma delle superfici degli esagoni regolari di lati *a* e *b* è $3\sqrt{3}a^2/2+3\sqrt{3}b^2/2=3\sqrt{3}c^2/2$, pari alla superficie dell'esagono regolare di lato *c*.

Soluzione del test 2- Diagramma della radice quadrata

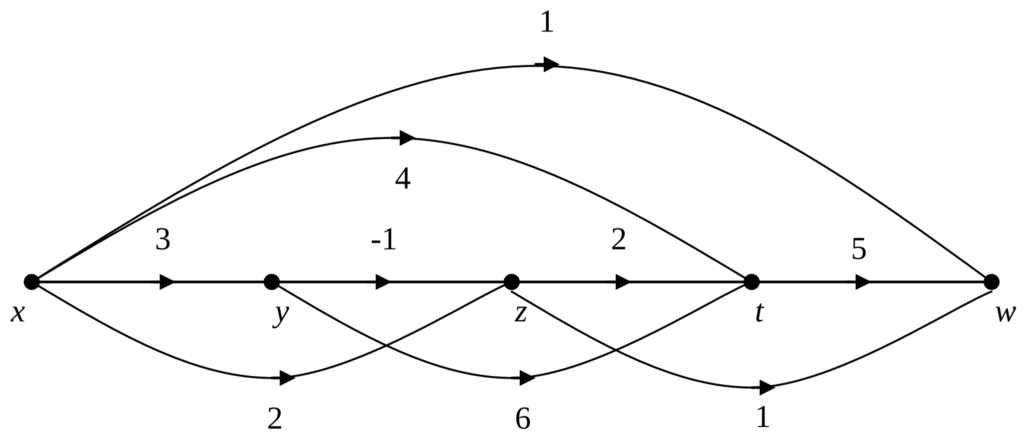
Il diagramma è la rappresentazione geometrica del procedimento di estrazione di radice quadrata di un numero formato da 8 cifre. La parte intera della radice, indicata con *abcd*, è il lato di un quadrato di area $(1000a+100b+10c+d)^2$, dove la prima cifra significativa *a è* nell'ordine delle migliaia, la seconda *b* nell'ordine delle centinaia, la terza *c* nell'ordine delle decine e la quarta *d* nell'ordine delle unità.



Esempio: diagramma corrispondente alla radice di 1522756, quadrato di 1234.

Soluzione del test 3 - Equazioni e grafi

Il grafo associato al sistema di equazioni è:



Il numero che contrassegna l'arco o il segmento orientato che va dal punto corrispondente ad una certa incognita *a* al punto corrispondente ad un'altra incognita *b* è uguale al coefficiente con cui l'incognita *a* compare nell'equazione avente *b* a primo membro. Ad esempio, l'arco da *y* a *t* è indicato col numero 6, perché 6 è il coefficiente con cui *y* compare nella terza equazione del sistema.

Dal grafo si ricava:

$$\begin{aligned} y &= 3x \\ z &= (3\cdot(-1)+2)x \\ t &= (3\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot 6+2\cdot 2+4)x \\ w &= (3\cdot(-1)\cdot 2\cdot 5+3\cdot(-1)\cdot 1+3\cdot 6\cdot 5+2\cdot 2\cdot 5+2\cdot 1+4\cdot 5+1)x \end{aligned} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{aligned} y &= 3x \\ z &= -x \\ t &= 20x \\ w &= 100x \end{aligned}$$

Le somme tra parentesi sono formate dai prodotti dei numeri corrispondenti ai cammini che, nel grafo, vanno dal punto corrispondente ad *x* al punto corrispondente all'incognita a primo membro. Ad esempio, i cammini da *x* a *z* sono due: quello diretto (curvilineo), contrassegnato dal numero 2, e quello passante per *y*, che è composto da un cammino (rettilineo) da *x* ad *y* (indicato col numero 3) e da un cammino (rettilineo) da *y* a *z* (indicato col numero -1).

Fascia 17-18

Soluzione del test 1 – Problema di Emma

Indichiamo, come nello schema, con *C* la vetta più alta e con *B* quella più bassa. La distanza in linea d'aria tra le due vette (*CB*) è pari all'ipotenusa di un triangolo rettangolo (in giallo) i cui cateti sono, rispettivamente, la distanza tra le proiezioni ortogonali (punti *D* ed *E*) delle vette sul piano orizzontale, posto al livello del mare, e la differenza h=*CD-BE* tra le altezze dei due monti. In base al teorema di Pitagora, si ha dunque

$$CB = \sqrt{h^2+DE^2}$$

D'altra parte, *DE=DH+HE*, ove *H* è la proiezione ortogonale sul piano orizzontale del punto *A* in cui è situata la stazione a valle delle due teleferiche. Si noti che la lunghezza *DH* è pari al cateto di un triangolo rettangolo (in verde) la cui ipotenusa è *AC* (lunghezza della fune della teleferica che conduce alla vetta più alta) ed ilcui altro cateto è pari al dislivello tra la stazione *A* e la vetta *C*, ossia pari a *CD- AH*. Pertanto per il teorema di Pitagora,

$$DH = \sqrt{AC^2-(CD-AH)^2}$$

Analogamente applicando lo stesso teorema al triangolo rettangolo colorato in azzurro si ha

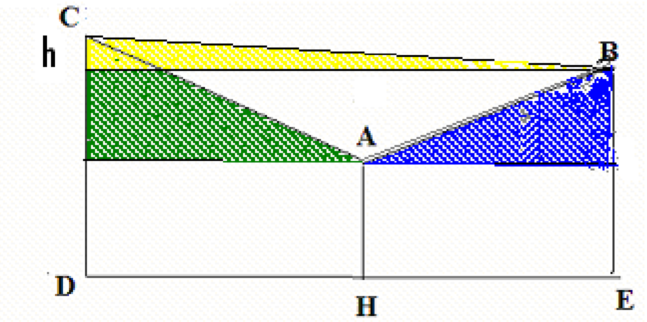
$$HE = \sqrt{AB^2-(BE-AH)^2}$$

Sostituendo nelle precedenti uguaglianze i dati del problema (espressi in metri)

CD = 2100, *BE* = 500, *AC*=2400, *AB* =1900, *AH*=1200,

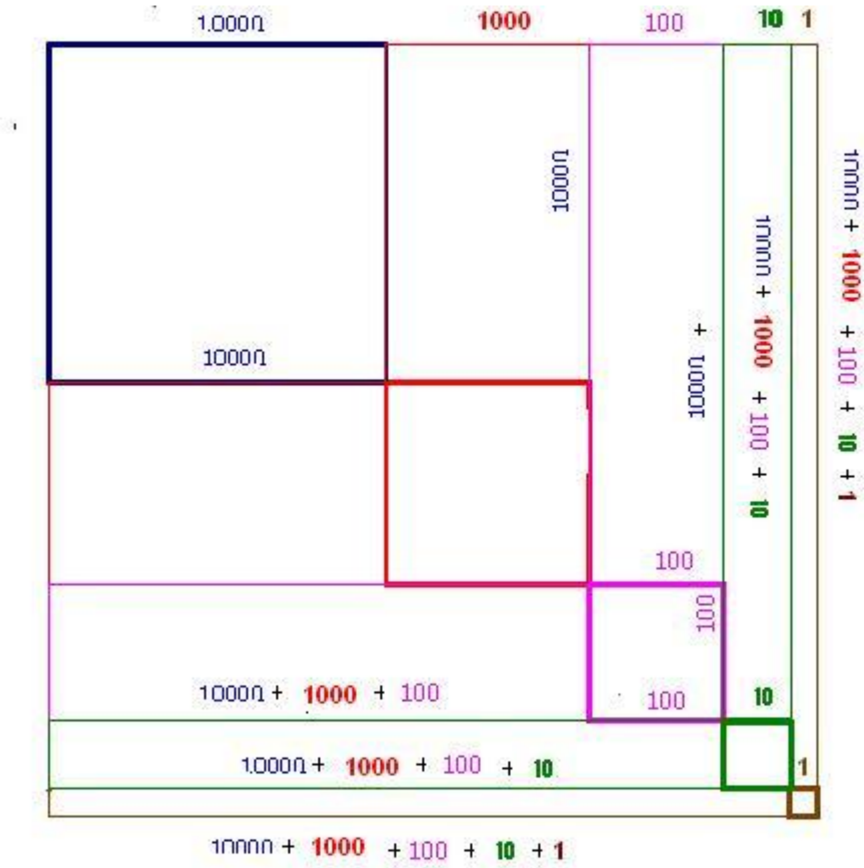
si ricava *DH* = 2224,86 m; *HE*= 1876,17 m; *DE*=4101,03 ed infine il valore approssimato *CB*=4144,65 m.

Schema



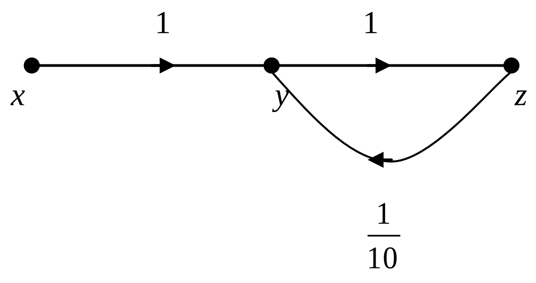
Soluzione del test 2

Il diagramma è la rappresentazione geometrica del procedimento di estrazione della radice quadrata di un numero formato da 8 cifre. La parte intera della radice, indicata con *abcd*, è il lato di un quadrato di area $(1000a+ 100b+10c+d)^2$, dove la prima cifra significativa *a* è nell'ordine delle migliaia, la seconda *b* nell'ordine delle centinaia, la terza *c* nell'ordine delle decine e la quarta *d* nell'ordine delle unità.
Il diagramma seguente è relativo a 123454321, quadrato di 11111.



Soluzione del test 3 - Equazioni e grafi

Il grafo associato al sistema di equazioni è:



Il numero che contrassegna l'arco o il segmento orientato che va dal punto corrispondente ad una certa incognita a al punto corrispondente ad un'altra incognita b è uguale al coefficiente con cui l'incognita a compare nell'equazione avente b a primo membro. Ad esempio, l'arco da z a y è indicato col numero $\frac{1}{10}$, perché $\frac{1}{10}$ è il coefficiente con cui z compare nella prima equazione del sistema.

Dal grafo si ricava:

$$y=\left(1+1\cdot\left(1\cdot\frac{1}{10}\right)+1\cdot\left(1\cdot\frac{1}{10}\right)\cdot\left(1\cdot\frac{1}{10}\right)+1\cdot\left(1\cdot\frac{1}{10}\right)\cdot\left(1\cdot\frac{1}{10}\right)\cdot\left(1\cdot\frac{1}{10}\right)+\cdots\right)x,$$

ossia

$$y=\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots\right)x=1,\overline{1}\cdot x\,.$$

Le somme tra parentesi sono formate dai prodotti dei numeri corrispondenti ai cammini che, nel grafo, vanno dal punto corrispondente ad x al punto corrispondente a y. I cammini da x ad y sono infiniti: oltre a quello diretto (rettilineo), contrassegnato dal numero 1, vi sono quelli che percorrono tale cammino, e poi percorrono, un numero arbitrario di volte, il cammino ciclico formato dal cammino che va da y a z (indicato con il numero 1) e dal cammino che va da z a y (indicato con il numero $\frac{1}{10}$).

D'altra parte, risolvendo il sistema di equazioni per sostituzione si trova:

$$y=z=\frac{10}{9}x$$

Dunque $1,\overline{1}=\frac{10}{9}$.