Congresso internazionale dei matematici di Roma – 9 aprile 1908

Sugli attuali programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie italiane

Giovanni Vailati

Un esame critico dei programmi di matematica attualmente vigenti nelle scuole secondarie italiane, è reso particolarmente interessante dalla imminenza di provvedimenti legislativi miranti a dare un nuovo assetto ai vari rami di esse, e a introdurre, in questi, nuovi soggetti e nuovi metodi di insegnamento.

Nonostante la ragionevole libertà che, dai nostri ordinamenti scolastici, è concessa agli insegnanti, sia per quanto riguarda il modo di svolgere i programmi prescritti, sia per quanto riguarda la diversa importanza o il diverso posto da assegnare alle singole parti di essi, pure la struttura dei programmi, specialmente in quanto esercita la sua influenza su quella dei libri di testo, è da porre tra le circostanze che maggiormente contribuiscono a determinare il carattere e l'indirizzo dell'insegnamento matematico nella nostre scuole secondarie.

Per ciò che riguarda l'*Algebra*, è, per esempio, difficile attribuire ad altra causa che non sia l'ordinamento dei relativi programmi, il fatto che, nella maggior parte dei libri di testo adoperati nelle nostre scuole, non si arriva alla trattazione anche più elementare delle equazioni di primo grado, se non passando attraverso a una lunga serie di capitoli dedicati alle operazioni sui polinomi (non è esclusa la divisione), ai numeri negativi, e a ogni altra specie di «generalità» sul calcolo letterale.

I risultati di un primo insegnamento dell'algebra impartito secondo un tale indirizzo, non è da stupire se non riescono molto soddisfacenti.

Invece di riconoscere, nei segni e nei metodi dell'algebra, dei semplici mezzi per giungere con maggior speditezza e facilità a risolvere questioni aritmetiche, proponibili e risolubili anche indipendentemente da ogni espressione in formule, gli alunni hanno l'impressione di trovarsi davanti a delle difficoltà di ordine superiore, a delle questioni del tutto nuove e non aventi alcun rapporto con altre di cui si siano prima occupati.

Anche quando sono in grado di penetrare il significato delle regole e delle manipolazioni di formule che imparano materialmente ad effettuare, è ben raro che essi riescano a vederne o a immaginarne la utilità e lo scopo. Si disorientano, si impazientano, si annoiano, si irritano, e finiscono troppo spesso per prendere in odio l'algebra e i suoi simboli al punto che, quando passano poi nei corsi superiori, allo studio di quelle scienze nelle quali, come per esempio nei vari rami della fisica, la conoscenza dell'algebra dovrebbe trovare la sua più proficua applicazione, essi si sentono inclinati a riguardare l'impiego di essa piuttosto come un impedimento che non come un aiuto per l'enunciazione o la rappresentazione dei più semplici rapporti di dipendenza o di connessione tra i fenomeni, o delle leggi fisiche più elementari.

Ciò che si è detto sopra a proposito del posto attribuito, negli abituali programmi d'algebra, ai primi esercizi di risoluzione delle equazioni di primo grado, è da ripetere anche per il caso delle equazioni di secondo grado.

L'insegnante che si facesse un dovere di seguire l'ordine indicato, per esempio, nei programmi del primo biennio dei nostri Istituti tecnici, dovrebbe astenersi dal proporre agli alunni problemi esigenti la risoluzione anche della più semplice equazione numerica di secondo grado a radici intere, prima di avere svolto innanzi a loro l'intera teoria delle operazioni sui numeri irrazionali e averli addestrati al calcolo dei radicali e magari anche a quello dei numeri immaginari.

Un siffatto ordinamento dei programmi è da attribuire, tanto in questo caso come in quello precedentemente considerato, a una medesima causa. Si è creduto che le nozioni fondamentali relative alla risoluzione delle equazioni non potessero né dovessero essere impartite se non sotto forma sistematica, prendendo cioè la mosse dal caso più generale, e determinando la «formula di risoluzione», da assoggettare poi a una discussione, portante a distinguere tutti i casi che possono presentarsi a seconda dei valori che si facciano assumere alle lettere in essa contenute.

È un procedimento questo che dovrebbe sembrare poco meno assurdo di quello di chi volesse, per esempio, far precedere la trattazione delle equazioni di secondo grado a quella delle equazioni di primo grado, col pretesto che dalle formule generali corrispondenti alle prime, quelle riguardanti le seconde possono derivare come casi particolari ponendo uguale a zero il coefficiente del quadrato dell'incognita.

I risultati di un insegnamento dell'algebra impartito in conformità a tali disposizioni dei nostri programmi, sono perfettamente analoghi a quelli che, nelle nostre scuole, si ottengono dall'insegnamento predominantemente grammaticale delle lingue antiche e moderne.

E allo stesso modo come per l'insegnamento delle lingue si va sempre più riconoscendo la convenienza e la necessità di ricorrere al cosiddetto «metodo diretto», consistente nel far precedere, invece che seguire, allo studio della grammatica e all'inculcazione delle regole, graduati esercizi di conversazione e di traduzione, eseguiti sotto la guida, e dietro l'esempio dell'insegnante – così anche per l'algebra non si dovrebbe tardare, se non fosse altro, a provvedere a che l'insegnante trovasse nei programmi un incoraggiamento e non un ostacolo a ordinare le sue lezioni in modo da mettere al più presto possibile l'alunno in immediato contatto colle questioni e coi problemi, alla cui soluzione si applicano le cognizioni teoriche che mano mano gli vengono impartite.

A impiegare i segni di operazione, le parentesi ecc., gli alunni dovrebbero venir condotti – e al più presto possibile – non per la via di regole o definizioni astratte, ma mediante copiosi e ben scelti esempi dell'applicazione di tali segni alla rappresentazione di calcoli numerici effettuati o da effettuare, e all'enunciazione di problemi, e delle condizioni a cui devono soddisfare le quantità in essi domandate.

L'uso delle lettere per indicare le quantità incognite è un espediente, al quale l'alunno può essere indotto a ricorrere quasi spontaneamente nei suoi sforzi di formulare nel modo più semplice e conciso i problemi che gli vengono proposti.

Ben diverso invece è il caso per l'impiego delle lettere nelle identità, o nelle espressioni algebriche, dove esse stanno per indicare numeri da scegliere ad arbitrio. Le formule di questo genere non possono acquistare interesse per gli alunni se non dopo che gli esercizi sul calcolo e la trasformazione delle espressioni, o equazioni, contenenti soltanto dati numerici, abbiano fatto sorgere in loro il desiderio di enunciare in modo generale le proprietà delle operazioni, di cui essi hanno così già imparato a giovarsi per semplificare e accelerare i calcoli numerici.

Tra i presupposti indispensabili per qualunque miglioramento in questa direzione, è da porre questo: che gli esami cessino di essere concepiti come doventi consistere in saggi di recitazione di questa o di quella parte delle teorie indicate nei programmi, e assumano invece la forma di vere e proprie prove pratiche, nelle quali l'alunno venga invitato a porre in opera le attitudini e le conoscenze che ha acquistate, applicandole alla trattazione di determinate questioni: alla risoluzione di equazioni, al calcolo o alla semplificazione di espressioni ecc.

Per ciò che riguarda la *Geometria* un primo punto fondamentale, nel quale mi sembra che gli attuali programmi delle nostre scuole secondarie siano bisognevoli di essere migliorati, è quello della connessione, che essi trascurano affatto di stabilire, tra l'insegnamento elementare della geometria e gli esercizi di disegno.

È necessario che in essi venga più chiaramente riconosciuta e sanzionata la necessità, di far precedere lo svolgimento sistematico della geometria, nello stadio superiore della scuola secondaria, da un insegnamento preliminare nello stadio inferiore, destinato a rendere noti e famigliari agli alunni i *fatti* geometrici, alla cui spiegazione, o dimostrazione, essi verranno poi condotti ad applicare il ragionamento deduttivo.

Il carattere che converrebbe fare assumere a questo primo insegnamento della geometria, non mi sembra sia completamente caratterizzato col denominarlo semplicemente, come spesso si fa, come un insegnamento *intuitivo*. Esso dovrebbe infatti essere non solo *passivo* ma anche *attivo*, e operativo, diretto cioè a sviluppare non solo le attitudini contemplative ed osservatrici degli alunni, ma anche quelle che entrano in giuoco nella costruzione delle figure e nei paragoni tra esse e le loro varie parti, mediante misure, scomposizioni, movimenti, mediante insomma tutti quei procedimenti che possono condurre a constatare e a verificare quelle proprietà di esse, che formeranno in seguito oggetto di analisi e di dimostrazione.

E neppure vi è ragione di stabilire una separazione precisa o un contrasto tra questa prima trattazione, per così dire sperimentale, della geometria, e quella «razionale» più adatta allo stadio superiore della scuola secondaria.

Il passaggio dall'una all'altra può, e dovrebbe, effettuarsi per gradi, applicando anzitutto il ragionamento deduttivo non già a dimostrare proposizioni che agli alunni appaiano già abbastanza evidenti, o della cui verità essi si siano già convinti per via di diretta constatazione, ma piuttosto a ricavare, appunto da queste ultime, altre proposizioni che essi ancora non conoscano e che essi possano poi facilmente verificare ricorrendo agli stessi mezzi.

Così essi impareranno a vedere nella deduzione un mezzo per «economizzare» le esperienze, o le verifiche, per giungere cioè senza il sussidio di queste, a *prevedere* il risultato di date misure o costruzioni sulle figure o sui loro elementi. Il procedimento di dimostrazione apparirà allora ad essi avere uno scopo e un'utilità, come mezzo di scoperta e di acquisto di nuove cognizioni.

A vedere poi nei procedimenti di dimostrazione anche un mezzo per spiegare e rendersi ragione di proprietà geometriche già a loro note, essi verranno condotti naturalmente, di mano in mano che, per mezzo del disegno o di altre operazioni di confronto tra le figure, essi verranno a prender conoscenza di verità geometriche che, appunto per non essere immediatamente evidenti, appariranno loro come bisognevoli di venire spiegate coll'aiuto di considerazioni atte a mettere in chiaro come e perché esse si verifichino.

Un altro mezzo efficace e al quale non si dovrebbe trascurare di ricorrere per coltivare negli alunni l'interesse e la fiducia nel ragionamento deduttivo, è quello di non limitarsi, almeno nel caso delle proposizioni più importanti, a dare, di ciascun teorema, una sola dimostrazione, mostrando, invece, come, a una stessa conclusione, si possa giungere prendendo diversi punti di partenza e procedendo per diverse vie.

Quanto più diverse queste vie saranno, e quanto più eterogenee le premesse su cui tali diverse dimostrazioni verranno a fondarsi, tanto più il confronto dei diversi casi gioverà a destare negli alunni il senso della coerenza logica delle varie parti della geometria, e dell'intima connessione e solidarietà che sussiste tra esse.

Per ciò che riguarda la portata che, sui metodi di insegnamento delle varie parti della matematica nelle scuole secondarie dovrebbe essere concessa ai risultati delle più recenti ricerche sulla logica matematica e sui principi della geometria, un pregiudizio, che mi sembra da combattere, è quello che consiste nel credere che tali risultati giustifichino o autorizzino delle trasformazioni del metodo di insegnamento nel senso di una maggiore astrazione o «teoricità», in confronto a quanto si fa ora ordinariamente.

A convincere del nessun fondamento di tale opinione o preoccupazione, mi basterà qui solo un accenno alle varie direzioni nelle quali gli studi ai quali ho sopra alluso, relativi ai fondamenti della matematica e all'analisi dei processi di ragionamento che essa impiega, manifestano invece una tendenza affatto opposta: la tendenza cioè a sfrondare e ad emancipare l'insegnamento secondario di una quantità di inutili sviluppi e di esigenze inopportune, facendogli assumere un carattere assai più svelto, assai più pratico, assai più intimamente connesso colle applicazioni concrete.

Il difetto infatti che si può spesso rimproverare agli autori dei nostri libri di testo, di volere nelle prime pagine insistere troppo a definire concetti o parole, anche quando ciò non giova affatto per dare all'alunno un concetto più chiaro del loro significato, tale difetto, dico, trova piuttosto un freno che non un incoraggiamento nelle considerazioni svolte dai logici matematici, sull'assurdità di voler tutto definire e sullà necessità di prendere le mosse, in qualsiasi trattazione, da un corto numero di concetti o termini non definiti, o definiti soltanto «implicitamente», cioè semplicemente col chiarire il significato delle frasi in cui essi compaiono.

Lo stesso è da dire della analoga, e non meno dannosa tendenza, a volere, fin dal principio, dimostrare ogni proposizione che sia capace di essere dimostrata, senza tener conto che in un primo insegnamento non è né necessario né conveniente adoperare, per la scelta dei postulati, o delle proposizioni da assumere senza dimostrazione, gli stessi criteri che si possono e devono seguire nelle ricerche e nelle analisi più avanzate sui fondamenti della geometria.

Anche qui le ricerche sulla indipendenza dei postulati, sulla loro portata, sulla loro compatibilità ecc., ponendo in piena luce quanto siano imperfette, dal punto di vista di tale analisi, le trattazioni ordinariamente seguite, non escluse quelle che riproducono l'esposizione di EUCLIDE, contribuiscono a far apparire tanto più assurda, e incompatibile colle esigenze didattiche inerenti a un insegnamento secondario, qualunque pretesa di cominciare l'insegnamento razionale della geometria con una elaborazione logicamente completa dei suoi principi.

Le stesse ricerche contribuiscono anche a fare apparire tanto più chiaro all'insegnante che ciò che si chiama il «rigore» di una dimostrazione geometrica è una qualità che dipende non dal numero, o dalla natura, delle presupposizioni o dei postulati di cui in essa si fa uso, ma piuttosto dal modo in cui questi vi si trovano impiegati. Una dimostrazione nella quale si faccia uso di ipotesi, o di premesse, più numerose, o anche affatto differenti da quelle che in altre sono adoperate, non cessa per questo di potere essere logicamente corretta, e di poter contribuire, come tale, a educare e a coltivare l'attitudine degli alunni, a ragionare in modo preciso e rigoroso. Per questo fine si richiede soltanto che ogni ipotesi, o postulato, a cui in ciascuna dimostrazione è fatto appello, sia chiaramente riconosciuto e formulato in modo esplicito, qualunque siano del resto le ragioni che possono avere indotto ad assumerlo tra i punti di partenza della trattazione. Nulla impedirà poi che in un corso superiore di studi, quelle stesse proposizioni che prima hanno funzionato da ipotesi o da punto di partenza delle dimostrazioni, vengano, alla loro volta, ad apparire come conseguenze di altre ammissioni o ipotesi più semplici, e così via, finché si arrivi a far dipendere l'intera catena delle dimostrazioni da proposizioni soltanto che non possono essere ulteriormente dedotte o ridotte le une alle altre. A ciò si deve arrivare in fine, e non mai in principio di uno studio ben ordinato della geometria.

Un'altra direzione in cui è da sperare che le recenti ricerche, di indole logica o storica sui principi della geometria, esercitino qualche influenza per il miglioramento dei programmi e dei libri di testo, delle nostre scuole secondarie, è quello che riguarda l'*applicazione dell'algebra alla geometria*.

L'opinione, largamente diffusa, che il ricorrere alle notazioni dell'algebra per rappresentare fatti o relazioni geometriche, costituisca quasi una contaminazione o un attentato alla purezza della trattazione di EUCLIDE, si dimostra sempre più incompatibile colle nostre cognizioni sullo sviluppo della geometria greca: cognizioni che ci conducono per esempio a riconoscere nella teoria delle proporzioni, esposta nel Libro V degli *Elementi* di EUCLIDE, e nei teoremi sulla «applicazione» delle aree, i caratteri di una vera e propria «algebra», della quale i geometri greci facevano, nelle loro dimostrazioni, un uso affatto analogo a quello che, dai matematici moderni, si fa delle operazioni dell'algebra, nelle trattazioni di geometria analitica.

Solo un concetto ristretto e inadeguato della «nostra» algebra conduce a credere che le interpretazioni o applicazioni geometriche delle sue formule non possano effettuarsi se non attraverso la considerazione dei numeri e delle misure corrispondenti agli enti geometrici – segmenti, angoli, aree ecc. – che in esse si trovano indicati dalle lettere: come se per esempio un'equazione di secondo grado – ridotta naturalmente a forma omogenea – non potesse sempre essere intesa, oltre che come una richiesta di determinare numeri che soddisfino a una data condizione, anche come una richiesta di determinare sogmenti tali, che tra certi rettangoli o quadrati costruiti con essi e con altri segmenti dati, sussista una data relazione.

E oltre che dell'applicazione dell'algebra alla geometria pare a me, nell'insegnamento secondario, non si dovrebbe trascurare di trar profitto anche di quelle che potrebbero qualificarsi come applicazioni della geometria all'algebra. Si pensi per esempio quanto più facilmente l'alunno riconoscerebbe il senso e la portata di una proposizione come questa: che «la media geometrica di due numeri positivi non può mai superare la loro media aritmetica», quando gli si facesse osservare che, in un circolo avente per diametro la somma di due segmenti, la seconda è rappresentata dal raggio, e l'altra invece dalla metà di una corda.

Abituare fino dal principio l'alunno a riconoscere le condizioni necessarie e sufficienti perché una data espressione o equazione possa interpretarsi come esprimente una costruzione o un problema geometrico, è certo da porre tra i mezzi più efficaci per bene prepararlo a concepire poi chiaramente il significato delle formule in cui, più tardi, i segni dell'algebra saranno da lui adoperati per esprimere proposizioni di meccanica o di fisica.

Ciò mi condurrebbe a occuparmi di un'ultima questione molto discussa al presente, se cioè convenga far posto nell'insegnamento secondario ai concetti di derivata prima e seconda e ai concetti fondamentali del calcolo infinitesimale. Nell'esprimere un'opinione decisamente favorevole a tale introduzione, mi permetto di rimandare, per ciò che riguarda le ragioni che ad essa mi inducono, all'esposizione che di tali ragioni ho già avuto occasione di fare in una precedente circostanza.