

**History and Epistemology for Mathematics Education**  
**Storia ed Epistemologia per la Didattica della Matematica**

*Appunti di didattica della matematica*  
*(a cura di G.T. Bagni)*

## **Capitolo 2**

### **L'apprendimento della matematica**

#### **2.1. APPRENDERE**

##### **2.1.1. Un meccanismo meraviglioso ma complesso**

Se riuscissimo a compilare una teoria onnicomprensiva, sperimentalmente verificata, perfetta dell'apprendimento risolveremmo immediatamente molti (o tutti) i problemi della didattica: l'apprendimento è infatti il fine ultimo della didattica, è la meta nella quale si concentrano e si riassumono gli sforzi, le riflessioni, le ricerche in questo campo.

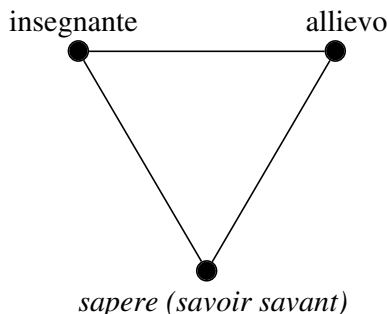
In realtà, l'apprendimento è un fenomeno estremamente complesso, che coinvolge aspetti propri di molte scienze (oltre alla disciplina insegnata e, auspicabilmente, appresa, non dimentichiamo la pedagogia, la psicologia, la filosofia etc.). In ciascun ambito scientifico, poi, moltissime sono le impostazioni, le correnti, le scuole di pensiero e risulta quindi quasi impossibile riuscire a fondere questa enorme

massa di ricerche, di dati, di possibili interpretazioni in una teoria unitaria, semplice ed efficace. Noi, chiaramente, non ci cimenteremo in questo titanico intento.

Del resto, il presente lavoro non vuole essere un manuale specialistico di didattica generale; né pretende di fornire un esaustivo panorama delle molte ricerche in didattica disciplinare (con riferimento, dunque, alla matematica). Ci limiteremo a fornire al lettore qualche spunto per la comprensione di alcuni fenomeni che si manifestano nell'ambito culturale al quale è dedicato questo lavoro, ovvero la didattica della matematica della scuola secondaria superiore<sup>1</sup>.

Una riflessione sul ruolo dell'apprendimento e dell'insegnamento ci sembra innanzitutto opportuna, anzi, necessaria. Nel delicato fondersi di questi due processi sono coinvolti l'insegnante, l'allievo e l'oggetto dell'insegnamento (la materia insegnata, i contenuti).

A tale proposito, iniziamo a presentare un celebre diagramma, dovuto a Y. Chevallard. Egli suggerisce la seguente (e, come vedremo, molto utile) schematizzazione dell'attività didattica<sup>2</sup>:

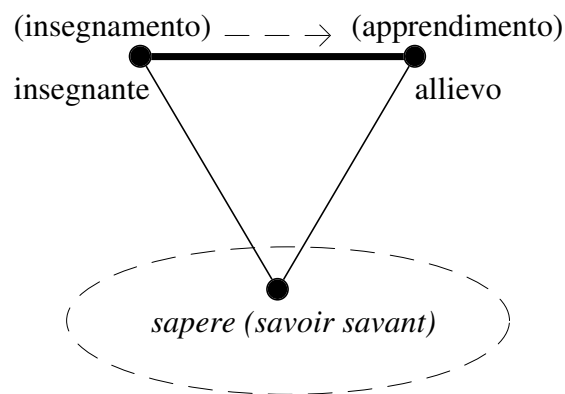


---

<sup>1</sup> Scusandoci anticipatamente se alcune osservazioni potranno sembrare a qualcuno scontate o banali. È un rischio impossibile da evitare!

<sup>2</sup> Il lettore potrà ad esempio vedere: Chevallard & Joshua, 1982; Chevallard, 1985; D'Amore & Frabboni, 1996, p. 111.

Il triangolo di Chevallard deve essere adeguatamente interpretato: ai suoi vertici troviamo l'insegnante, l'allievo e il "sapere". Ma attenzione: il termine "sapere" è davvero troppo generico e può, per questo motivo, trarre in inganno. Si tratta, infatti, di quello che lo studioso francese chiama *savoir savant*, ovvero il sapere accademico, quello (elevato, innovativo, in continua elaborazione) che nasce dalla ricerca. Ed è un sapere collocato (anche visivamente, nello schema proposto) ben al di fuori del rapporto diretto insegnante-allievo: un sapere, quindi, sostanzialmente esterno ai fenomeni di insegnamento e di apprendimento, e perciò momentaneamente inutilizzabile per una proficua didattica.



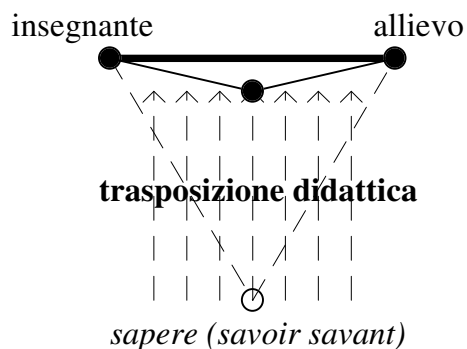
Il problema è semplice: se le cose stanno come esse vengono visualizzate in questa figura, senz'altro c'è qualcosa che non funziona; il "sapere" resta infatti del tutto estraneo dalla didattica e ciò è inaccettabile. Si tratta allora di operare:

- o sulle caratteristiche del nostro insegnamento, in modo da farlo "passare" per il punto in cui abbiamo supposto essere "concentrato" il sapere (ma, contemporaneamente, richiedere un analogo adattamento all'apprendimento dei nostri allievi, cosa non sempre così facile da ottenere);

- o su questo imponente *savoir savant*, per ottenere un suo adattamento ai processi di insegnamento e (soprattutto!) di apprendimento.

Evidentemente la soluzione migliore (per meglio dire: l'unica soluzione praticabile con speranze di successo!) è la seconda: non è pensabile che un allievo possa “digerire” contenuti (ad esempio) matematici direttamente espressi in forma accademica, senza che essi siano adeguatamente plasmati, resi accessibili.

È stato coniato un termine specifico per indicare questa indispensabile operazione di preventivo adattamento del *savoir savant* alle caratteristiche del dialogo educativo che avviene, in aula, tra l'insegnante e l'allievo: *trasposizione didattica* (Chevallard, 1985).



Uno dei compiti che ciascun insegnante deve quotidianamente affrontare per rendere possibile l'apprendimento, dunque, si identifica nella corretta ed efficace trasposizione didattica del *savoir savant* relativo alla propria disciplina<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Anche in questo caso è stato coniato un termine apposito, *noosfera*; con esso si indica «il luogo dei dibattiti di idee significative sull'insegnamento, le finalità della scuola, gli scopi della formazione, le attese della società per quanto attiene scuola e cultura (per esempio i programmi ministeriali); la noosfera è l'intermediario tra il sistema scolastico (e le scelte dell'insegnante) e l'ambiente sociale più esteso (esterno alla scuola)» (D'Amore & Frabboni, 1996, p. 111, in cui viene citato: Chevallard & Joshua, 1982).

### 2.1.2. Un esempio di trasposizione didattica

Non intendiamo approfondire, in questa sede, le questioni alle quali abbiamo fatto cenno; per rendere più chiara l'azione della trasposizione didattica, facciamo riferimento all'usuale presentazione del concetto di funzione (Bagni, 1997).

Per mostrare che la trasposizione didattica opera a tutti i livelli scolastici, seguiamo un diffuso e prestigioso manuale universitario (Apostol, 1977), nel quale troviamo la seguente prima descrizione del concetto:

«Dati due insiemi, diciamo  $X$  e  $Y$ , una funzione è una corrispondenza che associa ad ogni elemento di  $X$  uno ed un solo elemento di  $Y$ . L'insieme  $X$  si chiama dominio della funzione» (Apostol, 1977, I, p. 62).

Si tratta di una definizione che fa riferimento al *savoir savant*<sup>4</sup>? No: poche pagine dopo, infatti, lo stesso Autore dà una definizione formale di funzione:

«Una funzione  $f$  è un insieme di coppie ordinate  $(x; y)$  in cui non ve ne siano due con lo stesso primo membro. Se  $f$  è una funzione, l'insieme di tutti gli elementi  $x$  che compaiono al primo membro delle coppie  $(x; y)$  in  $f$  è detto dominio di  $f$ » (Apostol, 1977, I, p. 66).

Questa è una definizione certamente più vicina al *savoir savant* di Chevallard. Ma nella pratica (spesso, come abbiamo potuto constatare, neppure al livello di istruzione universitaria!), una funzione non viene introdotta soltanto facendo riferimento alle coppie ordinate  $(x; y)$ ; frequentemente viene privilegiato un approccio più intuitivo (come osservato in: Giusti, 1983, p. 121). Ancora Apostol nota:

---

<sup>4</sup> Pensiamo, ad esempio, all'introduzione bourbakista della funzione: Bourbaki, 1966. Sul problema (qui appena sfiorato) si veda: Bacciotti & Beccari, 1988.

«Come alternativa alla descrizione di una funzione  $f$  per mezzo della specificazione esplicita delle coppie che contiene, è normalmente preferibile descrivere il dominio di  $f$  e poi, a partire da ogni  $x$  del dominio, il modo con cui si ottiene il valore  $f(x)$ » (Apostol, 1977, I, p. 66).

Questa è... un'esplicita dichiarazione in favore della trasposizione didattica.

## **2.2. IL PROBLEM SOLVING**

### **2.2.1. I problemi**

Molto spesso, nel corso della nostra attività didattica, abbiamo fatto (facciamo e continueremo a fare) riferimento a *problemi*. Quotidianamente noi ed i nostri allievi abbiamo a che fare con dei problemi: durante le spiegazioni, nelle esercitazioni, nelle prove di valutazione etc.

Forse può essere interessante soffermarsi un po' su questo "oggetto" didattico così diffuso e chiedersi: che cos'è, dunque, un *problema*? Che cosa significa *risolvere un problema*?

Una bella risposta è data da una frase di G. Polya, che è opportuno riportare integralmente:

«Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano» (Polya, 1983).

Non c'è forse studioso della didattica della matematica che non si sia impegnato nella ricerca sulla risoluzione dei

problemi; ed anche in questo caso, ciò avviene con riferimento a tutti i livelli scolastici<sup>5</sup>.

Un'espressione, in particolare, compare in moltissimi stud' (recenti e non): *problem solving*.

Come vedremo nel prossimo paragrafo, l'attività di risoluzione di problemi è di fondamentale importanza nella didattica della matematica (e lo ripetiamo ancora: a tutti i livelli scolastici). Invece essa, talvolta, viene relegata al ruolo di un tradizionale procedimento di verifica, di valutazione: in ogni compito in classe c'è "il problema"... Ma la risoluzione di problemi, secondo molti studiosi, è molto di più: il suo corretto impiego la eleva al livello di una tecnica didattica straordinariamente efficace.

### **2.2.2. *Problem solving* e apprendimento**

Per comprendere l'importanza del *problem solving* in una moderna didattica della matematica dovremo presentare brevemente alcuni elementi classici della teoria della didattica (faremo riferimento a: Vigotskij, 1987; D'Amore, 1993).

Nella valutazione dei livelli dello sviluppo mentale dei un allievo distingueremo tra:

- Livello di *sviluppo effettivo*: con tale termine indicheremo il livello di sviluppo delle funzioni mentali ottenuto da cicli evolutivi già completati.

- Livello di *sviluppo potenziale*: è il livello di sviluppo che potrà essere raggiunto in un futuro più o meno prossimo, evidenziabile dalla proposta di un problema che, pur superando il livello di sviluppo effettivo, può però

---

<sup>5</sup> Indichiamo una (forzatamente incompleta!) rassegna di citazioni: Duncker, 1945 e 1969; Wertheimer, 1959; Polya, 1963, 1971 e 1983; Aebli, 1965; Luchins & Luchins, 1970; Newell & Simon, 1972; Gagné, 1973; Mosconi & D'Urso, 1973; Glaeser, 1976; Kleinmuntz, 1976; Burton, Mason & Stacey, 1982; Lester & Garofalo, 1982; Lester, 1983; Borasi, 1984 e 1986; Schoenfeld, 1985 e 1987; Boero & Ferrari, 1988; Brown & Walter, 1988; Boero, 1990; Cofman, 1990; D'Amore, 1993. Per un'antologia di risposte alla domanda "Che cos'è un problema?" si veda: Ferri, 1989.

essere affrontato con un aiuto esterno (ad esempio il suggerimento dell'insegnante).

Dunque, oltre al livello di sviluppo effettivo c'è una zona, ancora non "posseduta" dall'allievo, il cui controllo non è però del tutto impossibile, del tutto irraggiungibile: un problema concepito nell'ambito di questa zona, entro il livello che denominiamo di sviluppo prossimale, può essere affrontato (a volte con successo) grazie ad una... piccola spinta. La nostra esperienza scolastica ci conferma che è talora sufficiente un'indicazione, un suggerimento per "mettere in moto" alcuni allievi di fronte a problemi che, inizialmente, sembrano provocare un vero e proprio blocco nell'allievo, una situazione di incapacità ad impostare la risoluzione<sup>6</sup>.

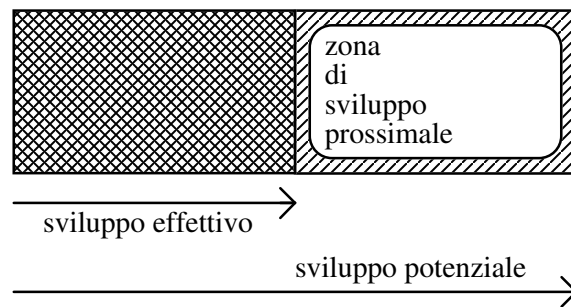
Proprio in questo si evidenzia il ruolo del *problem solving*. Esso ha dunque un campo d'azione ben definito, che chiamiamo *zona di sviluppo prossimale*. Secondo L.S. Vigotskij, la zona di sviluppo prossimale «è la distanza tra il livello di sviluppo così com'è determinato dal *problem solving* autonomo e il livello di sviluppo potenziale così com'è determinato attraverso il *problem solving* sotto la guida di un adulto o in collaborazione con i propri pari più capaci» (Vigotskij, 1987).

Possiamo riassumere la situazione nella figura seguente:

---

<sup>6</sup> Blocco, è importante notarlo, non causato da questioni di emotività o da condizioni esterne (Gagné, 1973), ma riferibile alla difficoltà, alla portata del problema stesso. Per quanto riguarda invece il *tempo di latenza*, ovvero quell'intervallo di tempo (più o meno lungo) che, inevitabilmente, divide la formulazione della domanda dal momento in cui viene data la risposta, indichiamo: D'Amore, 1993, pp. 103-108.





Eccoci dunque ad una conclusione molto importante: *il problem solving genera apprendimento.*

Grazie a delle attività di *problem solving*, infatti, l'allievo può superare significativamente il livello di sviluppo effettivo per addentrarsi nella zona di sviluppo prossimale: quindi, debitamente consolidato, questo processo porta ad innalzare il livello di sviluppo effettivo.

### **2.2.3. *Problem solving* e metacognizione**

Prima di lasciare il *problem solving* (argomento che ricordiamo essere vastissimo, che potrà essere approfondito dal lettore sulla base delle indicazioni bibliografiche fornite), riteniamo importante accennare a quel vasto insieme di attività, di riflessioni che va sotto il nome di *metacognizione* (Flavell, 1979).

La risoluzione di un problema (nonché i tentativi, anche parziali o errati di risoluzione) si basa su attività intuitive e tali attività non sempre possono essere chiare, razionalmente motivate, sia per l'insegnante che per l'allievo. Una fase di notevole importanza è proprio quella in cui l'allievo viene portato a riflettere sulle proprie intuizioni e dunque sulle caratteristiche della propria risoluzione del problema proposto: la metacognizione può allora qui identificarsi con la *metarisoluzione* (intendendo, con tale termine, una riflessione, autonoma o guidata, su come si è risolto, completamente o parzialmente, un problema: Wittman, 1981).

Le attività metacognitive sono fondamentali sia per dare corpo all'attività didattica (a quella, cioè, che si svolge in aula e che ha per meta direttamente l'apprendimento), sia nell'ambito della ricerca in didattica della matematica. Grazie alla metacognizione è possibile, ad esempio, indagare sulle scelte operate dall'allievo, sulle loro motivazioni, sui tentativi solo immaginati e magari non effettivamente attuati<sup>7</sup>.

Alcune strategie metacognitive, secondo M. Pellerey (1990 e 1991a), si basano sulla considerazione (e sul potenziamento) delle seguenti capacità (D'Amore, 1993, pp. 198-199):

- Capacità di inquadrare preliminarmente quanto necessario per la risoluzione del problema (esigenze di tempo, di materiali etc.).
- Capacità di pianificare l'attività risolutiva.
- Capacità di monitoraggio (riflettere sul proprio comportamento, essere eventualmente in grado di modificarlo).
- Capacità di valutazione del lavoro svolto (sia con riferimento a risultati parziali che con riferimento alla conclusione).

Lasciamo al lettore il compito di immaginare caratteristiche e modalità delle attività metacognitive che possono essere svolte in aula (come ricordato nella nota precedente, una discussione come quella riportata nella ricerca, in appendice, indicata con la lettera A può essere un suggerimento interessante). Certamente limitare la risoluzione di un problema ad una semplice, arida, sequenza di formule e di operazioni che culminano con il "risultato giusto" significa rinunciare a molte importanti (e feconde) possibilità didattiche collegate alla metacognizione.

Peccato, no?

---

<sup>7</sup> L'attività metacognitiva rende possibile un'utilissima (essenziale!) rivisitazione delle strategie risolutive messe in atto dagli allievi per risolvere il problema proposto.

## BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO 2

- Aebli, H. (1965), *I principi fondamentali dell'insegnamento*, Giunti-Barbèra, Firenze (edizione originale: 1961; riedizione: 1985).
- Apostol, T.M. (1977), *Calcolo*, I, Boringhieri, Torino.
- Bacciotti, A. & Beccari, G. (1988), Problemi didattici nei corsi universitari: l'introduzione del concetto di funzione: *Archimede*, XL, 41-49.
- Ballanti, G. (1991), *Modelli di apprendimento e schemi di insegnamento*, Giunti e Lisciani, Teramo.
- Bara, B. (1990), *Scienza cognitiva*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Barth, B.-M. (1990), *L'apprendimento dell'astrazione*, La Scuola, Brescia (prima edizione: Paris, 1987).
- Boero, P. & Ferrari, P.L. (1988), Rassegna di alcune ricerche sul "problema dei problemi": loro importanza per l'insegnamento: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 7/8, 11, 659-684.
- Boero, P. (1990), I problemi, AA.VV., *Guida alle videocassette-Matematica*, Irrsae Liguria, Genova.
- Borasi, R. (1984), Che cos'è un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulle sue implicazioni in didattica della matematica: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 2, 7, 83-98.
- Borasi, R. (1986), On the nature of problems: *Educational Studies in Mathematics*, 17, 125-141.
- Boscolo, P. (1986), *Psicologia dell'apprendimento scolastico. Gli aspetti cognitivi*, UTET, Torino.
- Bourbaki, N. (1966), *Eléments de mathématiques*, I, *Théorie des Ensembles*, Chapitre II, Hermann, Paris.
- Brown, S.I. & Walter, M.I. (1988), *L'arte del problem posing*, Sei, Torino.
- Burton, L.; Mason, J. & Stacey, K. (1982), *Thinking mathematically*, Addison-Wesley, London.

- Chevallard, Y. & Joshua, M.-A. (1982), Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance: *Recherches en didactique des mathématiques*, 3, 1, 159-239.
- Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Cofman, J. (1990), *What to solve?*, Oxford University Press, Oxford.
- D'Amore, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.
- D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.
- De La Garanderie, A. (1980), *Les profils pédagogiques*, Le Centurion, Paris.
- Duncker, K. (1945), On problem solving: *Psychological monographs*, 58, 1-112.
- Duncker, K. (1969), *La psicologia del pensiero produttivo*, Giunti-Barbera, Firenze (prima edizione: 1935).
- Duval, R. (1997), La compréhension des énoncés de problème de mathématisation: de la lecture à la résolution: D'Amore, B. & Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 25-46, Thessaloniki.
- Ferri, F. (a cura di) (1989), *Apprendimento per problemi in matematica nella scuola elementare*, R.T. 14, NRD di Modena e Comune di Modena.
- Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Riedel, Dordrecht.
- Fischbein, E. & Vergnaud, G. (1992), *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, D'Amore, B. (a cura di), Pitagora, Bologna.
- Flavell, J.S. (1979), Metacognition and cognitive monitoring: a new area of cognitive-development inquiry, *American psychologist*, 34, 906-911.
- Gagné, R.M. (1973), *Le condizioni dell'apprendimento*, Armando, Roma (prima edizione: 1970).

- Giordan, A. & De Vecchi, G. (1987), *Les origines du savoir*, Delachaux et Niestlé, Genève.
- Giusti, E. (1983), *Analisi Matematica 1*, Boringhieri, Torino.
- Glaeser, G. (1976), Heuristique générale: estimation de la difficulté d'un problème: AA.VV., *La Problématique et l'Enseignement de la Mathématique*, Ciaem, Louvain-la-Neuve, 33-47.
- Greeno, J.G. (1978), A study of problem solving: Glaser, R. (a cura di), *Advances in instructional psychology*, I, Erlbaum, Hillsdale.
- Johnson-Laird, P.N. (1988), *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna (prima edizione originale: 1983).
- Johnson-Laird, P.N. & Byrne, R.M.J. (1990), *Deduction*, Erlbaum, Hillsdale.
- Kahneman, D.; Slovic, P. & Tversky, A. (1982), *Judgement under uncertainty, heuristic and biases*, Cambridge University Press, New York.
- Kleinmuntz, B. (1976), *Problem solving. Ricerche, modelli, teoria*, Armando, Roma.
- Kosslyn, S.M. (1989), *Le immagini della mente*, Giunti, Firenze 1989 (prima edizione originale: 1983).
- Lester, F. & Garofalo, J. (a cura di) (1982), *Mathematical problem solving*, Franklin Institute Press.
- Lester, F. (1983), Trends and issues in mathematical problem solving research: Lesh, R. & Landau, I. (a cura di), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press.
- Luchins, A.S. & Luchins, E.H. (1970), *Wertheimer's seminars revisited: problem solving and thinking*, II, Faculty-Student Ass., State University of New York, Albany.
- Meirieu, P. (1987), *Apprendre... oui, mais comment?*, ESF, Paris.
- Mosconi, G. & D'Urso, V. (1973), *La soluzione dei problemi*, Giunti-Barbèra, Firenze.

- Nesher, P. & Kilpatrick, J. (a cura di) (1990), *Cognition and mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Newell, A. & Simon, H.A. (1972), *Human problem solving*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Paivio, A. (1986), *Mental representation: a dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford.
- Pellerey, M. (1990), Controllo e autocontrollo nell'apprendimento scolastico: il gioco tra regolazione interna ed esterna: *Orientamenti pedagogici*, 3, 473-491.
- Pellerey, M. (1991a), Apprendere a pensare matematicamente: Resnick, L.B. & Ford, W.W., *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*, SEI, Torino.
- Pellerey, M. (1991b), La ricerca in didattica della matematica: *Atti del Convegno "Processi cognitivi e problemi della ricerca didattica disciplinare"*, Milano.
- Piaget, J. (1980), *Experiments in contradictions*, Chicago, The University of Chicago Press.
- Polya, G. (1963), On learning, teaching and learning-teaching: NCTM, *Teaching and learning: a problem solving focus*, NCTM.
- Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, I-II, Feltrinelli, Milano.
- Polya, G. (1983), *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli, Milano (edizione originale: 1945).
- Resnick, L.B. & Ford, W.W. (1991), *Psicologia della matematica ed apprendimento scolastico*, SEI, Torino (prima edizione: 1981).
- Schoenfeld, A. (1985), *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.
- Schoenfeld, A. (a cura di) (1985), *Cognitive science and mathematics education*, Erlbaum, Hillsdale.
- Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

- Shepard, R.N. (1980), *Internal representations: studies in perception imagery and cognition*, Bradford, Montgomery.
- Vergnaud, G. (1994), *Il bambino, la matematica e la realtà*, Armando, Roma (edizione originale: Lang, Berne 1981).
- Vigotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1978).
- Wertheimer, H. (1959), *Productive Thinking*, Harper & Row, New York.
- Wittman, E. (1981), The complementary roles of intuitive and reflective thinking in mathematics teaching: *Educational studies in mathematics*, 12, 3, 389-397.

---

***Syllogismos.it***  
**History and Epistemology for Mathematics Education**  
**(Giorgio T. Bagni, Editor)**

---