www.centromorin.it/attivita/MaterialiCorsi/CA_2013.doc

CORSO DI AGGIORNAMENTO DOMENICALE

PER INSEGNANTI DELLA SCUOLA DELL'OBBLIGO.

TEMA

I PROBLEMI:

RAGION D'ESSERE DELLA MATEMATICA

E

FORZA DEL SUO INSEGNAMENTO

NELLA SCUOLA PRIMARIA E SECONDARIA

DI PRIMO GRADO.

ALCUNI SPUNTI DALLE PROVE DELL'INVALSI.

CONTRIBUTO DI MARIO FERRARI

PARTE PRIMA

CONSIDERAZIONI GENERALI

CAPITOLO 1

1 – INTRODUZIONE

Di problemi si parla molto, si discute molto, si scrive molto. Nella nostra vita quotidiana dobbiamo continuamente affrontare problemi: alcuni li risolviamo bene, altri male, altri rimangono insoluti. Questi problemi sono di tipo diverso: problemi economici, problemi familiari, problemi affettivi, problemi religiosi, problemi culturali, problemi professionali. Quelli di cui vogliamo parlare in questo corso di aggiornamento sono problemi professionali dell'insegnante di matematica della scuola dell'obbligo. Non problemi sindacali, economici, di rapporto con la dirigenza o con i colleghi, ma i problemi che di matematica nell'insegnamento della matematica. Abbiamo così delimitato il nostro campo di intervento e di studio.

2 – LA SELVA DELLE PUBBLICAZIONI

Il titolo, un po' inconsueto al posto del più normale "Bibliografia" serve per dare l'idea della quantità di pubblicazioni dedicate ai problemi nell'insegnamento della matematica. Solo per fare un esempio: se andate sul sito del Centro Morin, cliccate su "Rivista – Indice storico" e scrivete "Problemi" nella casella "Parole" vi compaiono ben 132 articoli pubblicati sulla rivista del Centro tra il 1979 ed il 2011. Li potete scaricare direttamente dal sito. Per questo non vi segnalo neppure un articolo della rivista.

Sulla rivista quadrimestrale "L'EDUCAZIONE MATEMATICA" edita a Cagliari sono riportati problemi e soluzione del Rally matematico transalpino. Nei tre numeri del 2011, gli ultimi usciti finora, nella rubrica "Spazio creativo" sono riportati e commentati i problemi del 18° Rally del 2010. Al Centro è consultabile la collezione completa della rivista.

Vi do qualche indicazione di libri accessibili e reperibili.

1 – C. Colombo Bozzolo e M. Ferrari (2001), Problemi di matematica per la prima e seconda elementare, Quaderno Didattico N. 17 del Centro Morin (esaurito. Si può avere in fotocopia);

2 - C. Colombo Bozzolo e M. Ferrari (2009), Problemi di matematica per la terza, quarta e quinta elementare, Quaderno Didattico N. 18 del Centro Morin, nuova edizione;

3 – C. Colombo Bozzolo, A. Costa e C. Alberti (a cura di) (2005), Nel mondo della matematica, Volume 1, Situazioni problematiche per alunni dai 6 agli 8 anni, Erickson;

4 - C. Colombo Bozzolo, A. Costa e C. Alberti (a cura di) (2005), Nel mondo della matematica, Volume 2, Situazioni problematiche per alunni dai 9 agli 11 anni, Erickson;

5 – M. Ferrari (2009), Insegnare matematica nella scuola primaria. Una proposta suddivisa per anni. Aritmetica, Quaderno Didattico N. 21 del Centro Morin;

6 – B. D’Amore (2003), Problemi di matematica nella scuola primaria, Pitagora;

7 – R. Zan (1998), Problemi e convinzioni, Pitagora;

8 – I. Aschieri – M. Pertichino – P. Sandri – P. Vighi (a cura di) (1997), Problemi ed alunni con problemi, Pitagora;

9 – F. Ferri (a cura di), Apprendimento per problemi in matematica nella scuola elementare. rapporto tecnico n. 14. (Reperibile in fotocopia);

10 - Bruno D'Amore (1993), “Problemi, pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving”, Franco Angeli, Milano;

11 - S. I. Brown — M. I. Walter(1988), “L'arte del problem posing”, SEI, Torino;

12 - L. Artusi Chini (a cura di)(1985), “Numeri e operazioni nella scuola di base”, Zanichelli, Bologna (Esaurito. Reperibile in fotocopia);

13 - G. Polya (1983), “Come risolvere i problemi di matematica”, Feltrinelli, Milano;

14 – G. Polya (1971), “La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi” Vol. primo, Feltrinelli, Milano;

15 - Martelli e altri (1993), “I problemi nella pratica didattica”, Franco Angeli, Milano.

CAPITOLO 2

1 - MATEMATICA E PROBLEMI

Dovrei incominciare a dire che cosa è la matematica e che cosa è un problema. Dei problemi parlerò fra poco. La domanda "che cosa è la matematica" è troppo generale e, forse, è impossibile rispondere. Una risposta scherzosa, ma con un fondo di verità, è stata data da Bertrand Russell: "La matematica è la disciplina nella quale non si sa di che cosa si parla e non si sa se quello che si dice è vero". Due valenti matematici, Richard Courant e Herbert Robbins, hanno scritto un libro intero per rispondere a questa domanda: "Che cos'è la matematica?" pubblicato da Bollati Boringhieri. In realtà non hanno risposto direttamente alla domanda, ma hanno illustrato i contenuti ed i metodi della matematica. Per questo un altro matematico, Reuben Hersh, ha pubblicato un volume dal titolo "Cos'è davvero la matematica" pubblicato da Baldini & Castoldi. Non voglio inoltrarmi in una discussione sui massimi sistemi e vi propongo una risposta che può sembrare "ad usum delphini" dato che dobbiamo parlare di problemi; in realtà questa risposta è suggerita dalla millenaria storia della matematica. Ecco la risposta:

LA MATEMATICA E' LA DISCIPLINA CHE CERCA DI RISOLVERE INDOVINELLI SERI E INTELLIGENTI.

Questi indovinelli seri e intelligenti sono quelli che chiamiamo **problemi**. La matematica è nata per risolvere problemi e si alimenta, cresce e si sviluppa risolvendo problemi. Essi possono essere interni alla matematica oppure provenire dalle scienze sperimentali o sociali, o dalla realtà quotidiana. A proposito della provenienza "esterna alla matematica" di problemi di cui la matematica si occupa segnalo un libretto pubblicato dalla Unione Matematica Italiana e intitolato **"L'esplosione della matematica"**. Scorrendo i vari capitoletti si ha una idea della vastità e della varietà dei problemi nella soluzione dei quali interviene la matematica. Riporto dalla Introduzione:

"L'obiettivo di questo scritto è di far conoscere la matematica sotto tutti i suoi più svariati aspetti scientifici, tecnologici, culturali, sociali; di sottolineare la diversità e l'universalità di una disciplina che mantiene legami abbastanza saldi sia con la fisica, la chimica, l'economia e la biologia che con la storia, la musica e la pittura. La matematica è ovunque. Senza di essa non esisterebbero i calcolatori, né i sistemi informatici, né i telefoni cellulari; non vi sarebbe alcun laboratorio per la costruzione di automobili e aerei, né alcun sistema di localizzazione satellitare, di trattamento dei segnali, di decifrazione del genoma, di previsioni meteorologiche, di crittografia, di carte con micro-chip, di robots."

Possiamo imparare molto dalla storia della matematica. Mi limito a fare qualche cenno.

1 - Noi siamo abituati a studiare la **geometria** nelle forme nobili codificate da Euclide di Alessandria (IV secolo a.C.) nei suoi "Elementi". Le sue origini, però, al dire dello storico greco Erodono (484-426 a.C.) sono legate ad un "**prosaico problema di tasse".**

Nell'antico **Egitto** i possessori di terreni dovevano pagare le tasse al Faraone. Siccome le benefiche inondazioni del Nilo distruggevano i confini c'era la necessità di ricostruirli per poter pagare le tasse. Qui intervenivano gli *agrimensori o tenditori di corde* per ristabilire i confini come erano prima delle inondazioni. Questa è l'origine della **geometria,** come indica il suo stesso nome.

Naturalmente la geometria ha continuato a svilupparsi anche nell'antico Egitto per affrontare e risolvere "**problemi di ottimizzazione"** cioè problemi di risparmio di tempo e di energie intellettuali. Per questo la casta sacerdotale, detentrice del potere culturale, è andata alla ricerca di formule per l'area e il volume di figure familiari.

Gli Egizi conoscevano le formule per l'area del rettangolo, del triangolo, del trapezio e del volume della piramide. Quello che non sappiamo è come gli Egizi siano giunti a trovare queste formule.

Il più antico "libro" di matematica egiziano pervenuto fino a noi è il "Papiro di Rhind", dal nome dell'inglese che lo comprò a Luxor nel 1858, chiamato anche "Papiro di Ahmes" dal nome dello scriba che lo copiò intorno al 1650 a C. Il papiro contiene 80 problemi di aritmetica, di algebra e di geometria.

2 - Dalla **Mesopotamia** ci sono pervenute circa 50 000 tavolette d'argilla di cui molte di argomento matematico. Alcune contengono calcoli, altre problemi di aritmetica, di algebra e di geometria.

Ecco un esempio: "Una trave lunga 30 è appoggiata verticalmente a una parete. Il suo estremo superiore si è spostato verso il basso di 6. Di quanto si è spostato l'estremo inferiore?"

Tutto il problema consiste nel trovare la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa misura 30 e che la differenza tra l'ipotenusa e l'altro cateto è 6. Si fa ricorso al teorema di Pitagora che i Babilonesi conoscevano, anche se non nella sua generalità. (Vedere Bunt – Jones – Bedient, Le radici storiche delle matematiche elementari, Zanichelli).

3 - Nel secolo VII la geometria sbarca in **Grecia** con Talete che aveva passato diverso tempo in Egitto. In Grecia, la matematica subisce un lento processo di astrazione e diventa una scienza razionale, speculativa. Si trasforma in "matematica pura", in "matematica contemplativa". Esempio tipico` sono gli **Elementi** di Euclide. In essi non ci sono problemi pratici, né di applicazione della matematica alle scienze. Ci sono, però, problemi matematici. Delle 465 proposizioni degli Elementi, circa un centinaio sono problemi. La prima proposizione del libro 1 è un problema di costruzione con riga e compasso, gli unici strumenti accettati da Euclide: "Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero".

4 - Al di fuori degli *Elementi* i matematici greci ci hanno trasmesso tre famosi problemi di costruzione con riga e compasso:

Problema della duplicazione del cubo: con riga e compasso costruire un cubo di volume doppio di un cubo assegnato.

Problema della trisezione dell'angolo: con riga e compasso dividere un angolo qualunque in tre angoli uguali.

Problema della quadratura del cerchio: con riga e compasso costruire un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio assegnato.

Questi problemi hanno attraversato tutta la storia della matematica fino al secolo XIX quando è stata data una **risposta negativa.**

I Greci, però, usando strumenti più raffinati e potenti della riga e del compasso avevano risolto i tre problemi, il primo con la Cissoide di Diocle (II secolo a.C.), il secondo con la Concoide di Nicomede (III secolo a.C.), il terzo con la quadratrice di Dinostrato (IV secolo a.C.).

5 - Inventore di strumenti e fenomenale solutore di problemi matematici fu **Archimede** (287-212 a. C.), il più grande matematico dell'antichità. Basta ricordare il titolo di una sua opera: "Misura del cerchio". La proposizione III dice: "La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera ancora di meno di un settimo del diametro e di più di dieci settantunesimi". In simboli: $\left(3+\frac{10}{71}\right)d < C < \left(3+\frac{1}{7}\right)d$ dove C è la lunghezza della circonferenza e d quella del suo diametro.

Questo problema del rapporto tra lunghezza della circonferenza e lunghezza dei suo diametro, che Euclide aveva dimostrato essere costante, lo troviamo presso i popoli antichi.
Per Ebrei e Babilonesi questo rapporto era uguale a 3; gli Egizi erano arrivati a 3,16.

6 – Anche **l'aritmetica**, come già abbiamo visto parlando degli Egizi e dei Babilonesi, è stata un vasto campo di problemi.
L'ipotesi più accreditata, ma siamo nelle nebbie della preistoria, è che i numeri siano stati inventati per risolvere problemi di proprietà e di transazioni commerciali. Al di la di questo è certo che presso i popoli culturalmente più evoluti (Sumeri, Egizi, Fenici e poi Greci e Romani, solo per indicarne alcuni) si è posto un

problema di ottimizzazione: come scrivere tutti i numeri senza usare un simbolo diverso per ciascun numero. In sostanza si trattava di inventare un sistema di numerazione, cioè di scegliere un numero ridotto di simboli e di fissare regole per la loro combinazione in modo da poter scrivere tutti i numeri che occorrevano.
I vari popoli hanno dato soluzioni diverse a questo problema inventando
sistemi additivi semplici, come i Greci, che usavano come cifre le lettere del loro alfabeto (sistema ionico);
sistemi additivi ripetitivi, come gli Egizi, che ripetevano più volte lo stesso simbolo nella scrittura dei numeri;
sistemi additivi e parzialmente sottrattivi come i Romani;
sistemi posizionali senza zero (come cifra finale) come i Babilonesi, che usavano la base sessanta integrata con la base dieci. In tempi recenti, durante il periodo seleucide (III secolo a.C.) i Babilonesi introdussero lo zero intercalare per indicare che mancava una potenza di sessanta;
sistemi posizionali con zero (Indiani, Arabi, noi).
L'ultimo sistema, il nostro, nonostante sia l'ultimo arrivato, ha vinto la concorrenza di tutti gli altri, anche perché ha risolto il grosso problema della **elementarizzazione degli algoritmi delle operazioni.**

7 - Composta esclusivamente di problemi di aritmetica e algebra è l'Aritmetica di **Diofanto** di Alessandria (III-IV secolo d. C.), il più grande matematico greco dell'età argentea (l'età aurea è quella di Euclide e Archimede). Articolata in 13 libri, a noi sono pervenuti i primi 6.

Questo manuale si configura come una raccolta di 189 problemi formulati in termini di esempi numerici specifici e, quindi, con una evidente fisionomia didattica. Molti dei problemi proposti danno origine ad equazioni indeterminate in due o più incognite. Questo argomento di studio viene ora chiamata "analisi diofantea".

Ecco un esempio di problemi proposti: "Dividere l'unità in due numeri ed aggiungere a ciascuno di essi un numero dato in modo che il prodotto delle somme sia un quadrato".

8. La letteratura matematica indiana era motivata dalla astronomia e si trova in libri dedicati all'astronomia. Sono molti, però, anche i problemi, più o meno pratici, più o meno divertenti, presentati dai matematici indiani.

Ecco un esempio: "La quinta parte di un branco di scimmie, meno tre, al quadrato, entrò in una caverna; una era in vista essendosi arrampicata su un albero. Dire quante erano".

9 - Con **Leonardo Pisano**, detto il Fibonacci (1170 – 1250), inizia il "rinascimento" della matematica nell'Europa cristiana.

I suoi scritti, a cominciare dal capolavoro, il Liber abaci (1202), sono sostanzialmente libri di problemi di aritmetica commerciale e finanziaria e di geometria. Ne riporto uno:

"Un lavoratore avrebbe dovuto prendere 7 bisanti al mese se avesse lavorato, mentre avrebbe dovuto restituire 4 bisanti per un intero mese di assenza dal lavoro. Questi talvolta lavorò e talvolta no ed alla fine del mese ricevette un solo bisante. Quanti giorni lavorò?"

10 - Anche il padre degli algebristi francesi, **Nicolas Chuquet** (XV secolo d.C.), dissemina il suo capolavoro, la *Triparty en la science des nombres* , di numerosi problemi di carattere commerciale, anche se non rifugge da considerazioni teoriche. Ecco un esempio:

Problema: Un commerciante compera 15 pezze di tela pagando complessivamente 160 scudi. Alcune costano 11 scudi, altre 13. Si vuol sapere quante pezze comprò di ciascuno dei due prezzi.

11 - Nei secoli XV e XVI furono fiorenti in Italia molte "**botteghe d'abaco**", dove si insegnava a fare i calcoli, a tenere la contabilità di banche ed esercizi commerciali, le conversioni tra le varie monete e le diverse unità di misura. La letteratura prodotta e usata in queste botteghe, e rimasta sostanzialmente inedita fino a tempi recenti, era fatta soprattutto di esempi pratici e di problemi con essenziali e stringate premesse teoriche. Nella biblioteca del Centro sono presenti una ventina di volumi di queste botteghe d'abaco.

Mi limito a ricordare "larte de labbacho" detta anche "Aritmetica di Treviso", di autore ignoto, stampata a Treviso nel 1478. L'incunabolo della Biblioteca Capitolare di Treviso è stato pubblicato dall'editrice Canova con note introduttive, a parte, di Giuliano Romano.

Riporto uno dei suoi problemi: "Maistri 17 fano in 9 zorni 2 case. Domando maistri 20 in quanti zorni faranno 5 case".

12 - Questa tradizione dei problemi continuò anche in opere che non uscivano dalle botteghe di abaco e che non avevano una destinazione commerciale. Mi riferisco alle opere di Luca Pacioli (1445 - 1514), Nicolò Tartaglia (1506 - 1559), Girolamo Cardano (1501-1576), Rafael Bombelli (1525 - 1573).

Ecco un esempio tratto dalla "Summa de aritmetica geometria proportioni et proporzionalità", di Pacioli pubblicata a Venezia nel 1494.

"Uno compra 7 ova per tanto men de 12 denari quanto che li costò li 12 ovi men de 8 denari. Dimando che valse l'ovo".

13 - Con **Galileo** incomincia il processo di matematizzazione della scienza e quindi l'uso della matematica nella soluzione di problemi scientifici. Riporto un celeberrimo passo di Galileo: "La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non si impara a intendere la lingua, e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile ad intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanemente per un oscuro labirinto".

Questo processo raggiunge un picco altissimo con i "Philosophiae naturalis principia mathematica"pubblicati da Newton nel 1687.

Naturalmente esso continuò ad estendersi ed ora, come abbiamo già visto, sono moltissime le più disparate discipline che utilizzano strumenti matematici.

2 – INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E PROBLEMI

Stante quanto detto nel paragrafo precedente ci si può domandare come mai nell'insegnamento della matematica, a qualunque livello scolare, i problemi abbiano, tutto sommato, una posizione marginale. Le cause sono diverse.

1. L'insegnamento della matematica, soprattutto nella scuola superiore, è sempre stato sotto l'influsso degli Elementi di Euclide ritenuti un esempio insuperato di libro di testo. Gli Elementi procedono con il metodo della "sintesi": enunciazione dei principi fondamentali (postulati), definizioni, teoremi. I problemi, pur presenti negli Elementi, sono sempre e solo problemi interni alla matematica che si risolvono applicando la teoria già studiata.

Questo è stato il modello dell'insegnamento della matematica, specie della geometria, dal secolo XVI in poi nel mondo europeo.

Ci sono stati, però, dei tentativi di reazione alla impostazione euclidea, nei quali si privilegiavano gli aspetti intuitivi e problematici per arrivare, poi, alla costruzione di una teoria. Qui basterà citare gli: "Elemens de géométrie" del 1741 del francese Alexis - Claude Clairaut (1718 -1765) il quale si propone di "rendere le cose più interessanti e più intelligibili ai principianti" e di "occupare continuamente i miei lettori a risolvere problemi, cioè a cercare i mezzi di fare qualche operazione o di scoprire qualche verità sconosciuta (...). Seguendo questa via, i principianti conoscono a ciascun passo che lor si faccia fare qual è la ragione che determina l'inventore; e così possono acquistare più facilmente lo spirito di invenzione".

Questa linea, però, rimase minoritaria. Basta ricordare che il primo libro di testo per la scuola classica italiana dopo l'unificazione fu proprio gli "Elementi di Euclide" curati da Betti e Brioschi.

2. Un insegnamento per teorie: postulati, definizioni, teoremi, esercizi, oltre che tradizionale, è decisamente più facile che non un insegnamento per problemi. E' il modello dei libri di testo, è il modello dei nostri professori e noi tendiamo a riproporlo nella nostra attività didattica, sia pure adattandolo al livello scolare nel quale insegniamo.

3.Un insegnamento per problemi è decisamente più impegnativo e difficile per insegnanti ed alunni. Se non vuole essere episodico, estemporaneo e disorganico, esso prevede l'individuazione di un campo di problemi per risolvere i quali bisogna "inventare" strumenti teorici. I vari segmenti teorici devono poi essere raccordati in una teoria organica.

Tutto questo richiede impegno e fantasia da parte dell'insegnante, impegno e studio da parte dello studente.

Forse per questo i pochi libri di testo che hanno fatto questa scelta non hanno avuto molta fortuna. Basta ricordare il libro di testo “Matematica come scoperta” di Giovanni Prodi.

4. Nel biennio delle superiori l'algebra fa la parte del leone ed anche nella scuola media la sua posizione è di tutto rispetto. Questo insegnamento si concretizza in una valanga di esercizi, spesso tecnici e noiosi, ma è privo di problemi interessanti.

Problemi interessanti possono essere offerti dall'aritmetica, ma essa non viene studiata nel biennio e non viene utilizzata per questo nella scuola media.

Ecco qualche esempio.

- Se "assaggiamo" qualche terna di numeri naturali consecutivi, ci accorgiamo che in ciascuna c'è un multiplo di 3: 1, 2, 3; 8, 9, 10; ecc. Si tratta di verifiche che possono essere fatte anche alla scuola elementare nella quale si scrivono anche le “tabelline dei multipli”. Il problema che sorge è il seguente:

  “ Questo fatto si verificherà sempre, qualunque sia la terna di numeri naturali consecutivi che considero? E come faccio a saperlo dato che non posso scrivere tutte le infinite terne di numeri consecutivi?”

  Qui interviene l'algebra, almeno nel senso della generalizzazione.

  Certamente nella scuola media, ma, forse, anche nella scuola elementare, possiamo indicare un generico numero naturale con il simbolo n. Allora la generica terna di numeri consecutivi sarà: n, n+1, n+2.

  Ora incomincia la esplorazione. Iniziamo con il numero n.

  Se è multiplo di 3, cioè n = 3k siamo a posto.

  Se non è multiplo di 3, allora può essere n =3k+1. In questo caso abbiamo n+2 =3k+3, cioè n + 2 è multiplo di 3.

  Se n non è multiplo di 3, allora può essere n =3k+2. In questo caso abbiamo n+1=3k+3 cioè n+1 è multiplo di 3.

  La conclusione è che uno dei tre numeri n, n+1, n+2 è multiplo di 3.

- Facciamo il prodotto di tre numeri consecutivi, come
  1 x 2 x 3 = 6; 4 x 5 x 6 = 120; 2 x 3 x 4 = 24 ecc.
  In ciascuna terna prendiamo il numero centrale, ne facciamo il cubo e gli sottraiamo il numero stesso:
  $2^3 - 2 = 6$; $5^3 - 5 = 120$; $3^3 - 3 = 24$
  Sarà un caso che abbiamo ottenuto gli stessi risultati di prima? Si possono utilizzare altre

terne di numeri consecutivi e ci si accorge che la situazione non cambia. Nasce il sospetto che questo accade sempre. E’ l’algebra che ce lo conferma.

Scriviamo la terna di numeri consecutivi in questo modo: $(n - 1)$; n; $(n + 1)$ e ne facciamo il prodotto: $(n - 1) \times n \times (n + 1)$. Sviluppando questo prodotto otteniamo esattamente $n^3 - n$. Viene così garantita la validità generale delle prime verifiche.

Io penso che problemi come questi si possono affrontare nella scuola media. Ne possiamo discutere.

CAPITOLO 3

PROBLEMI E PROGRAMMI DI MATEMATICA

La prassi didattica italiana non privilegia certo, in generale, un insegnamento per problemi. In genere nei libri di testo e nelle attività in classe e a casa si risolvono tanti esercizi, ma pochi problemi interessanti.

Eppure il posto dei problemi nei programmi di matematica è di tutto rispetto.

1 – PROGRAMMI DEL 1979 (SCUOLA MEDIA)

Tra gli "obiettivi" contenuti nelle "Indicazioni generali" vi è "porsi problemi e prospettarne soluzioni". Nel primo tema dedicato alla geometria leggiamo:

" c) semplici problemi di isoperimetria e di equiestensione "

Il quarto tema è

Problemi ed equazioni

> a) Individuazione di dati e di variabili significative in un problema. Risoluzione mediante ricorso a procedimenti diversi (diagrammi di flusso, impostazione e calcolo di espressioni aritmetiche...).
>
> b) Lettura, scrittura, uso e trasformazioni di semplici formule.
>
> c) Semplici equazioni e disequazioni numeriche di primo grado.

2 – PROGRAMMI DEL 1985 (SCUOLA ELEMENTARE)

Basta ricordare, al di là di affermazioni sparse nei programmi, che il primo tema è proprio dedicato ai problemi.

a) l problemi. - Il pensiero matematico è caratterizzato dalla attività di risoluzione di problemi e ciò è in sintonia con la propensione del fanciullo a porre domande e a cercare risposte. Di conseguenza le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscano da esperienze reali del fanciullo e che offrano anche l'opportunità di accertare quali apprendimenti matematici egli ha in precedenza realizzato, quali strumenti e quali strategie risolutive utilizza e quali sono le difficoltà che incontra.

Occorre evitare, peraltro, di procedere in modo episodico e non ordinato e tendere invece ad una progressiva organizzazione delle conoscenze.

Obiettivi:

- Tradurre problemi elementari espressi con parole in rappresentazioni matematiche, scegliendo le operazioni adatte; quindi trovare le soluzioni e interpretare correttamente i risultati; inversamente, attribuire un significato a rappresentazioni matematiche date;

- Individuare situazioni problematiche in ambiti di esperienza e di studio e formularne e giustificarne ipotesi di risoluzione con l'uso di appropriati strumenti matematici, sia aritmetici sia di altro tipo;
- Risolvere problemi aventi procedimento e soluzione unici e problemi che offrono possibilità di risposte diverse, ma ugualmente accettabili;
- Individuare la carenza di dati essenziali per la risoluzione di problemi ed eventualmente integrarli; riconoscere in un problema la presenza di dati sovrabbondanti, oppure contraddittori con conseguente impossibilità di risolverlo.

E' un tema denso di concetti:

- Importanza dei problemi per la matematica
- Loro corrispondenza alla psicologia del bambino
- Importanza didattica
  - Come punto di partenza per la costruzione di concetti
  - Come strumento di valutazione di risultati, processi e strategie
- Dal linguaggio comune alla espressione matematica e viceversa
- Pluralità di tipi di problemi

3 – I PROGRAMMI DEL 2001 (SCUOLA DELL'OBBLIGO)

Non è appropriato chiamarli "programmi" perché non sono mai stati ufficialmente approvati dal Ministero. Hanno un titolo:

"Matematica 2001. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica." Sono un complesso di proposte per la scuola di base elaborate da una Commissione dell'Unione Matematica Italiana e della Società Italiana di Statistica sponsorizzate dal Ministero. Pur essendo molto ricche e ben articolate non hanno mai avuto una approvazione ufficiale e non sono mai entrate in vigore. Il volume è stato stampato a Lucca nel 2003 da Matteoni Stampatore. Alcune sue proposte per la scuola media sono state riprese e sviluppare nel Progetto ministeriale Mat@abel.

In questi "programmi" vi è un tema dal titolo: **"Risolvere e porsi problemi".**

4 – INDICAZIONI NAZIONALI DEL 2004 (SCUOLA DELL'OBBLIGO)

Sono i programmi della Moratti. Non vi è un tema esplicito, ma non mancano cenni sulla risoluzione dei problemi e sui percorsi per risolverli.

5 – INDICAZIONI DEL 2007 (SCUOLA DELL'OBBLIGO)

Sono i programmi di Fioroni e sono quelli che, forse, sono ancora attualmente in vigore.

Nella premessa generale agli "Obiettivi di apprendimento" si afferma esplicitamente che "Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate spesso alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni – problema, rappresentandole in modi diversi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che si intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive. Già nei primi anni di scuola l'alunno comincia ad avere un controllo sul processo risolutivo e a confrontare i risultati con gli obiettivi."
In particolare nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà una attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e soluzione di equazioni,…) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una soluzione del problema. Una attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo delle capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti."
Come si vede è un testo molto ricco anche da un punto di vista didattico.

6 – INDICAZIONI NAZIONALI 2012 (PRIMO CICLO DELL'ISTRUZIONE)

Sono i programmi del ministro Profumo ed entreranno in vigore, credo, nell'anno scolastico 2013-2014 (o forse 2014-2015 dato che da quest'anno l'editoria scolastica dovrà conformarsi alle nuove Indicazioni).

Per quanto riguarda i problemi, queste indicazioni ripetono esattamente quanto è stato scritto per le Indicazione del 2007. Mi limito a riportare quanto dicono per il laboratorio di matematica, il tempo più adatto alla soluzione dei problemi soprattutto quelli che richiedono anche attività manuali.

"In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. Nella scuola primaria si potrà utilizzare il gioco, che ha un ruolo cruciale nella comunicazione, nell'educazione al rispetto delle regole condivise, nell'elaborazione di strategie adatte a contesti diversi."

CAPITOLO 4

CHE COSA E' UN PROBLEMA?

1 – IL PROBLEMA: UN CONCETTO RELATIVO

Prima di riportare alcune risposte, note in letteratura, alla domanda del titolo del capitolo voglio sottolineare un aspetto importante: qualunque cosa si intenda con la parola "problema", è certo che si tratta di un **concetto relativo**, cioè il fatto che una certa situazione sia problematica dipende dalle persone, dalle circostanze, dagli strumenti che si hanno a disposizione, dalle informazioni possedute, dall'epoca considerata.

Vediamo qualche esempio.

1 - Ci mettiamo nel mondo dei numeri naturali e ci domandiamo: dati **due numeri naturali qualunque**, maggiori di 1, chiamiamoli x e y, è vero che esiste un numero naturale z in modo che valga la uguaglianza: $x^2 + y^2 = z^2$? In altre parole: la somma dei quadrati di due numeri naturali è sempre un quadrato? Anche per ragazzi della scuola elementare che sappiano che cosa vuol dire addizionare e quadrato di un numero, questa non è una situazione problematica. Basta prendere i numeri 2 e 3, farne i quadrati e sommarli per rispondere (negativamente) alla domanda.

Si può formulare anche questa domanda: **esistono** numeri naturali x e y per i quali valga la uguaglianza: $x^2 + y^2 = z^2$?

La situazione è, ovviamente, diversa dalla precedente perché qui ci si domanda se esiste **almeno** una coppia di numeri x e y che verificano la uguaglianza.

Questa è certamente una situazione problematica che può essere molto difficile per persone che non hanno studiato il teorema di Pitagora. Per chi l'ha studiato incombe l'obbligo di fornire almeno una "terna pitagorica".

In questo ordine di idee ci possiamo domandare se **esistono** x e y tali che $x^3 + y^3 = z^3$.

Prima del secolo XVII questo non era un problema perché nessuno si era posta la domanda. Fu Pierre de Fermat (1601 – 1665) a porsi la domanda ed a rispondere in questo modo: "non è possibile dividere un cubo in due cubi, o in biquadrato in due biquadrati, né, in generale, dividere alcun'altra potenza di grado superiore al secondo in due altre potenze dello stesso grado."

Questo è rimasto un problema per tutti i matematici fino al 1995 quando fu risolto dal Wiles.

2 – Sono ancora problemi per tutti i matematici i due seguenti: è vero che si può scrivere ogni numero pari maggiore di 2 come somma di due numeri primi? Quanti sono i numeri primi gemelli, cioè i numeri primi che differiscono di 2?

3. Secondo la mia esperienza ci sono situazioni che sono problematiche, quasi allo stesso modo, per alunni ed insegnanti.

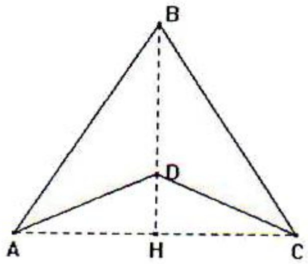
Problema della lumaca.

Una lumaca vuole salire in cima ad una colonna alta 3 metri. Di giorno sale 1 metro, mentre di notte scende di mezzo metro. Quanti metri percorre per arrivare in cima alla colonna?

La risposta non è immediata per nessuno (altrimenti non sarebbe un problema). Forse è bene costruirsi un modellino. Quando l'ho proposto ad insegnanti, e l'ho fatto molte volte, ho sempre ottenuto risposte diverse e spesso errate. Volete cimentarvi anche voi? Coraggio. E' proponibile in classe? In quale classe? Ritorneremo più avanti su questo problema.

Il quadrilatero concavo con diagonali perpendicolari.

ABCD è un quadrilatero concavo semplice ed ha le diagonali perpendicolari. Quanto vale la sua area?



Superati i primi due scogli, cioè le diagonali esistono e sono AC e BD, e tenendo presente che sono perpendicolari, calcolare l'area del quadrilatero. Spesso mi sono sentito dire che non si può calcolare l'area perché non ci sono le misure, cioè i numeri. Non sono necessari perché non si richiede di calcolare la misura dell'area. Qui l'area viene intesa come grandezza.
Il problema può essere risolto con una **strategia sottrattiva** (area di ABC – area di ADC) oppure con una **strategia additiva** (area di ABD + area di BDC).

2 - CHE COSA E' UN PROBLEMA?

Forse non esiste una definizione di "problema". In letteratura, però, ci sono illustrazioni, descrizioni di quando ci si trova davanti a una situazione problematica. Ne riporto qualcuna. E incomincio da G. Polya, uno dei più grandi studiosi di problemi in didattica della matematica.

G. Polya.

"Risolvere un problema è trovare mezzi non noti per raggiungere un fine distintamente concepito. Se il fine, con la sua semplice presenza, non suggerisce istantaneamente i mezzi; se, quindi, si devono ricercare i mezzi, riflettendo consapevolmente su come raggiungere il fine, allora si deve risolvere un problema."

"Risolvere un problema significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, trovare una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo desiderato, che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere i problemi come l'attività più caratteristica del genere umano."

Oleron (citato da Glaeser).

"Quando una persona si trova di fronte ad una situazione e il bagaglio delle risposte intuitive o abituali non gli permette di venirne a capo, tale situazione è un problema".

Kantowski.

"Un problema, è una situazione che differisce da un esercizio poiché colui che deve risolverlo non ha a disposizione un procedimento o algoritmo che può con certezza condurlo alla soluzione".

Lester.

"Un problema è un compito per cui:

- L'individuo o il gruppo che si confronta con esso vuole o ha bisogno di trovare una soluzione,
- Non c'è una procedura immediatamente accessibile che garantisca o determini in modo completo le soluzioni,
- L'individuo o il gruppo devono fare uno sforzo per trovare una soluzione".

Traversi.

<u>Problema</u>: ogni situazione di fronte alla quale il repertorio di risposte immediatamente disponibili non permette di fornire una reazione adeguata.

Si può parlare di problema quando, partendo da una situazione in cui si conosce un certo numero di informazioni, si devono trovare nuove informazioni ricorrendo alle varie forme dell'intelligenza.

Dunker.

"Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta, ma non sa come raggiungerla".

Mettendo insieme un po' tutti questi elementi possiamo dire che

- Un problema suppone la presenza di un ostacolo, di una difficoltà che non sia immediatamente superabile con i mezzi che si hanno a disposizione. Non c'è problema se non ci sono difficoltà. " Domande alle quali è possibile dare una risposta senza impegnare in alcun modo le proprie capacità in uno sforzo di riuscita, magari soltanto richiamando in modo meccanico uno schema acquisito in precedenza o applicando in modo sequenziale un certo numero di regole, non pone un problema" (F. Ferri). Mi sembra che in questa situazione si trovino moltissimi dei "problemi" dei libri di testo, chiamati "problemi" solo perché espressi a parole. In realtà si tratta di esercizi e non di problemi.
- Un problema richiede l'attivazione di ragionamenti, di collegamenti, di ricerche ed, eventualmente di fantasia e di inventività. Scrive Polya: "Un'idea geniale risolve spesso un grande problema, ma nella risoluzione di tutti i problemi interviene un pizzico di genialità. […] Quindi un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionale alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale."

- Un problema richiede uno scopo da raggiungere ed una motivazione per raggiungerlo. In caso contrario la situazione prospettata potrà essere problematica in se stessa, ma non per Pierino. In altre parole, se davanti a una domanda un individuo non ha alcuna motivazione, alcun interesse a cercare una risposta, per quell'individuo non c'è problema.

3 – DUE ESEMPI

Il ritorno di Pierino.

Pierino torna a casa dalla scuola e trova la porta di casa chiusa. Che fare?

Ci possono essere diverse situazioni.
Se Pierino ha la chiave di casa, la situazione non è problematica per lui. Apre ed entra in casa. Non c'è nessuna difficoltà e, quindi, non c'è problema.
Se non ha la chiave ed in casa non c'è nessuno Pierino è ben contento perché va subito a giocare con i suoi compagni. La situazione non è problematica per lui. Senza motivazione non c'è problema.
Se Pierino vuole entrare in casa perché vuole fare merenda, oppure svolgere i compiti per poi guardare la televisione, allora la situazione è problematica per Pierino: c'è un ostacolo, non ha gli strumenti immediatamente disponibili per superarlo ed ha una motivazione per superarlo.

Il quadrato magico di ordine tre.

E' noto a tutti il gioco del "quadrato magico di ordine tre" spesso riportato anche nei sussidiari..

Il gioco consiste nel collocare nelle nove caselle i numeri da 1 a 9, ma in modo che la somma dei numeri disposti nelle tre righe, nelle tre colonne e nelle due diagonali sia sempre la stessa (costante magica). Si tratta di un vero problema anche per gli insegnanti sia perché ci sono difficoltà non immediatamente superabili applicando un algoritmo noto, sia perché ci sono motivazioni per risolverlo (affrontare un compito assegnato, divertirsi con la matematica). Provate a risolverlo.

Supponiamo di aver già costruito, anche in classe, questo quadrato magico "raffinato". Ora lanciamo la sfida, il problema, di costruire un quadrato magico "popolare" usando solo i numeri 0 e 1 e disponendoli nelle nove caselle in modo che la costante magica sia 1. Sembra un banale esercizio. Effettivamente lo è per chi conosce un po' di teoria dei quadrati magici. Per gli altri, invece…Ci può essere la motivazione di divertirsi facendo matematica e di giocare con nuove regole. La soluzione non è immediata ed è anche inaspettata. Provate anche voi.

4 – PRINCIPALI ELEMENTI COSTITUTIVI DI UN PROBLEMA

I ricercatori in didattica della matematica hanno cercato di guardare “dentro” il problema, di vederne gli elementi costitutivi. La nostra rivista ha pubblicato in proposito due articoli di cui raccomando la lettura:

R. Borasi, Che cosa è un problema? Considerazione sul concetto di problema e sulla sua utilizzazione nella didattica della matematica, aprile 1984;

P. Boero, Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare, settembre 1986.

I due articoli possono essere scaricati direttamente dal sito del Centro.

I due articoli, soprattutto il primo, si trovano, un po’ commentati, in

F. Ferri, Apprendimento per problemi in matematica nella scuola elementare, citato nella bibliografia.

Noi li utilizzeremo un po’ nel prossimo capitolo.

CAPITOLO 5

IL PROBLEMA E L'INSEGNANTE

1 – FUORI DELLA CLASSE

Un problema serio, e tutti i problemi devono essere seri, non può essere improvvisato. L'insegnante deve prepararlo con accuratezza prima di assegnarlo agli alunni. L'insegnante potrebbe costruirsi un suo "quaderno di problemi" da assegnare al momento opportuno. Che cosa significa "preparare un problema"? Io penso a queste cose.

1.1 - Caratterizzare il problema con un **titolo** possibilmente attraente e accattivante in modo che gli alunni possano facilmente ricordarlo e, quando è il caso, richiamarlo. Vi propongo un esempio tratto dal ricordato Quaderno Didattico N. 18.

Titolo: **I pennarelli di Lucia**

Testo

A Lucia piace molto giocare con i numeri. L'altro giorno contando i suoi pennarelli si è accorta che contandoli per 2 ne avanzava 1, contandoli per 3 ne avanzava 2, contandoli per 4 ne avanzava 3.
Sapresti indovinare quanti pennarelli ha Lucia?
Spiega il tuo ragionamento.
Scrivi il numero che hai trovato usando moltiplicazione e addizione.

Visto che ci siamo provate a risolverlo anche voi….

Quante soluzioni avete trovato? Quante soluzioni ha il problema? Possiamo raccoglierle tutte in una formula? Quale? Perché?

Noi abbiamo dato questo problema nella classe terza. Potete trovare le soluzioni dei bambini ed esempi dei loro ragionamenti nel Quaderno 18 (pg. 36-40). Riporto, perché mi sembra notevole, come un bambino ha organizzato le sue soluzioni (11 e 23).

Un bambino, Celeste, ha organizzato così la sua soluzione.

x2 AV. 1	x3 AV. 2	x4 AV. 3
3	5	7
5	8	(11)
7	(11)	15
9	14	19
(11)	17	(23)
13	20	27
15	(23)	31
17	26	35
19	29	39
21	32	43
(23)	35	

E’ naturale che anche i più bravi solutori si siano fermati a 35 come numero di pennarelli di Lucia perché è poco verosimile che ne possegga di più. La matematica, però, supera la realtà e ci garantisce che le soluzioni del problema sono infinite e sono raccolte in questa formula:

$$n = 11 + 12k$$

dove n è il numero di pennarelli, 11 è la soluzione minima, 12 è il minimo comun multiplo di 2, 3, 4 e k un numero naturale qualunque. Siccome ogni multiplo di 12 è divisibile per 2, per 3 e per 4, il numero che si ottiene aggiungendo a 11 un multiplo di 12 ha gli stessi resti di 11 quando venga diviso per 2, per 3, per 4. Questa formula potrebbe essere scoperta nella scuola media dove si studia il minimo comun multiplo.
In quinta si può ampliare il discorso dicendo che “contando per 5 ne avanzano 4”.
Le soluzioni sono sempre infinite e sono un sottoinsieme delle soluzioni prima trovate.
Per trovare la più piccola basta “saggiare” le soluzioni del problema di prima la cui ultima cifra è 9. Si trova 59. Tutte le soluzioni sono racchiuse nella formula

$$59+60k$$

dove k = 0, 1, 2, 3, ...
Il numero 60 della formula è il minimo comun multiplo di 2, 3, 4, 5.
Siccome 60:12 = 5 ogni 5 soluzioni del problema precedente, a partire da 11, otteniamo una soluzione del nuovo problema.

Una variante, inserita fra i problemi di quinta del Quaderno 21, è la seguente:
“L’altro giorno ho fatto una scoperta interessante. Contando per 2 le mie biglie me ne avanzava 1; contandole per 3 me ne avanzavano 2; contandole per 4 me ne avanzavano 3; contandole per 5 me ne avanzavano 0. Quante sono le mie biglie? Spiega il tuo ragionamento.”

1.2 – L’insegnante deve provvedere alla stesura del **testo** del problema, alla sua **formulazione** con l’indicazione esplicita di ciò che “viene offerto” (i dati del problema, le informazioni) e di ciò che “viene richiesto”, cioè il compito da svolgere, gli obiettivi che si vogliono raggiungere. Spesso, ma non necessariamente, tutto ciò è espresso sotto forma di domande, di consegne da eseguire. La formulazione delle domande possono anche essere demandate al solutore del problema Ciò che “viene offerto” può essere, almeno in parte, implicito cioè supposto noto. Esso fa parte del “**contesto del problema**” e può essere classificato fra i “prerequisiti”.

Ecco un primo esempio: La somma di due numeri primi è un numero primo? Sempre? Mai? Qualche volta? E se si, quando lo è?

Qui le informazioni, i dati del problema, sono ridotti al minimo: devi sommare due numeri primi generici e non individuati.

Il contesto implicito è, invece, molto ricco: concetto di addizione, di numero primo, la somma di due numeri dispari è un pari, c’è solo un numero primo pari.

Qual è la vostra risposta al problema?

Un secondo esempio:

Queste sono terne pitagoriche: ($x^2 + y^2 = z^2$)

3	4	5
6	8	10
5	12	13
20	48	52
8	15	17

Che cosa puoi dire?

Questa domanda serve solo a stimolare il solutore a porsi delle domande come:

- Come sono i numeri delle singole terne?
  - due dispari e uno pari;
  - tre pari, ma la seconda si ottiene dalla prima moltiplicando per 2 e la quarta dalla terza moltiplicando per 4.
  - Nessuna terna è tutta di numeri dispari
- Quali rapporti ci sono fra i numeri di una terna?
  - Il terzo è maggiore degli altri due e minore della loro somma (disuguaglianza triangolare).
  - La somma dei quadrati dei primi due è uguale al quadrato del terzo.
- Quante terne pitagoriche ci sono?
  - Infinite, perché da una ne posso ottenere infinite altre moltiplicando i tre numeri per uno stesso numero.
  - Anche le altre terne, quelle primitive, sono infinite.[Sono primitive le terne formate da numeri che sono primi fra di loro come la prima, la terza e la quinta terna]

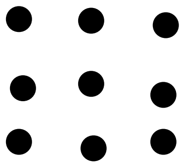
Conviene osservare esplicitamente che talvolta il solutore inserisce nel **contesto** di certi problemi condizioni, in generale restrittive, che il problema non prevede.
Ecco un esempio: **tre numeri ganzi**

Trova tre numeri, diciamo a, b, c, se esistono, tali che $a + b + c = a \times b \times c$.
I bambini della scuola elementare non aggiungono nessuna condizione restrittiva perché per loro i numeri sono solo numeri naturali.
Quelli delle scuole medie, e gli insegnanti, in modo inconsapevole, si limitano anch'essi a considerare solo numeri naturali e trovano, al massimo, due terne di numeri. Questa condizione restrittiva, non richiesta dal problema, impedisce di trovale le infinite soluzioni del problema.

Ecco un altro esempio.
"Costruire con 6 fiammiferi di uguale lunghezza 4 triangoli equilateri.

La maggior parte delle persone si mette al lavoro prendendo in mano carta e penna e disponendo in diversi modi sul foglio i 6 fiammiferi, concludendo, dopo un certo tempo, che la costruzione non è possibile. Anche avendo a disposizione i 6 fiammiferi, difficilmente si arriva a dare una soluzione, perché si continua a lavorare nel piano rendendo, di fatto, impossibile la costruzione dei 4 triangoli equilateri che possono invece essere costruiti nello spazio come facce di un tetraedro. Nel testo non si danno indicazioni circa lo spazio in cui operare (se bi o tridimensionale). Il vincolarsi a cercare la soluzione operando nel piano è dunque imporre una condizione che il testo non richiede: il contesto viene mutato in modo rilevante.

Un altro esempio tipico è il seguente: unire i nove punti con 4 segmenti che passano una sola volta per ogni punto e tracciati senza sollevare la matita dal foglio.



La condizione restrittiva, che spesso il solutore inserisce, è quella di non" uscire" dal "quadrato" dei nove punti, rendendo insolubile il problema.

1.3 - Il testo del problema deve essere **facilmente comprensibile**, formulato con termini il cui significato sia noto agli alunni in modo da evitare una pluralità di interpretazioni e in modo da non aggiungere difficoltà linguistiche a quelle matematiche. L’insegnante deve tener presente che il vocabolario degli alunni è molto più povero del suo. Spesso le soluzioni offerte dagli alunni sono errate perché non hanno capito il significato di termini usati nel testo del problema.

Ecco un esempio tratto da Cornoldi e altri, Matematica e metacognizione: atteggiamenti metacognitivi e processi di controllo. Materiali di recupero e sostegno, Erickson

“Un cartolaio compra una **partita** di 120 quaderni spendendo 31 800 lire. Quale sarà il **guadagno** per ogni quaderno se li rivende a 375 lire l’uno?”

A parte il fatto che la parola “**partita**” è perfettamente inutile nel testo del problema, secondo voi quale significato può essere assegnato alla parola dai bambini di adesso? Potranno, forse, pensare a quaderni che, come nei cartoni animati, fanno una partita a pallone.

La parola “**guadagno**” è sbagliata anche se fa parte di una infausta “trimurti” della scuola elementare (le altre due parole sono spesa e ricavo). Facendo i conti i bambini dovrebbero rispondere che il cartolaio guadagna 110 lire per ogni quaderno e magari concludere che è un ladro. Questo è falso perché nella spesa del cartolaio, oltre al costo di ogni quaderno, pagato alla ditta fornitrice, ci sono anche le spese generali (luce, affitto, personale, tasse).

Ecco un altro esempio tratto dalla attività del nostro Nucleo e confluito nel Quaderno N. 18 (pg. 74-78).

Per chi fa il tifo Simona?

“Quattro bambini: Roberta, Simona, Tonino e Ugo sono tifosi di quattro squadre diverse: Alci, Bisonti, Camaleonti e Daini.
Sappiamo che:

- A Roberta non piacciono né le Alci né i Camaleonti.
- Tonino è un appassionato tifoso dei Daini.

- Ugo è tifoso dei Camaleonti.

Per quale squadra tifa Simona?”

Il testo del problema, formulato e discusso in una riunione del Nucleo, ci è sembrato abbastanza chiaro e privo di ambiguità. Alcuni bambini, però, non hanno esitato a far tifare Roberta o Simona per due squadre. La negazione rafforzata relativa a Roberta da alcuni è stata interpretata nel senso che Roberta non tifa per nessuna squadra, da altri nel senso che tifa per le altre due squadre. Forse sarebbe stato meglio scrivere: “A Roberta non piacciono le Alci e non piacciono i Camaleonti.”

Nel formulare un problema, l'insegnante, può, **volutamente**, scrivere un testo ambiguo per osservare come i ragazzi lo interpretano e, poi, giustificano l'interpretazione.

Esempio

Un quadrato ha lato lungo 1. Costruisci un quadrato doppio.

"Doppio", però, può essere il lato oppure l'area e le difficoltà, nelle due interpretazioni, sono completamente diverse.

1.4 – L’insegnante deve pensare e preparare una **varietà di problemi** quanto alle possibili soluzioni. Esse costituiscono “l’insieme delle soluzioni”.

Possiamo pensare a:

- Problemi che ammettono *una e una sola soluzione*.
- Problemi che ammettono *più soluzioni, anche infinite*;
- Problemi che *non ammettono soluzioni*.

Il problema “**Per chi fa il tifo Simona?”** ha *una ed una sola soluzione*.
Il problema “**I pennarelli di Lucia”** ha *più soluzioni*, che possono essere scoperte anche nella scuola elementare; anzi, *ne ha infinite* e possono essere scoperte nella scuola media.
Ecco un altro esempio:

“Ho messo 10 frutti in un cesto. Un po' sono pere ed un po' sono mele. Quante possono essere le pere? E le mele?”

Trovare una soluzione è immediato. Basta prendere due numeri naturali la cui somma è 10.
L'insieme di tutte le soluzioni, dal punto di vista matematico, è rappresentato dalle coppie di numeri naturali che verificano l'equazione $x+y=10$ e sono 11.

I bambini potranno esprimersi in termini di "numeri amici del 10", ma il testo li costringe a scartare le "soluzioni estreme", cioè (0,10) e (10,0).

I problemi che *non ammettono soluzione* sono di due tipi:

- Per insufficienza di informazioni
- Per contraddittorietà dei dati.

Esempi

I due fratelli

"Matteo e Luca sono due fratelli. Matteo studia più volentieri di Luca. Oggi sono tornati a casa da scuola alle 12 e mezza. Matteo deve studiare storia e alle 17 ha già finito; Luca, invece, chiude il libro di matematica alle 18. Chi ha studiato di più? Perché?"

Il problema, così come è formulato, non ha soluzione. Basta, però, "inventare" l'ora d'inizio dello studio per risolvere il problema.

Ancora frutta

"In un cesto ci sono 25 frutti. Le mele sono il doppio delle pere. Quante sono le mele? E le pere?"

Il problema non presenta palesi contraddittorietà nei dati, ma non ci vuole molto a scoprirle.

Nella scuola elementare si può partire dal fatto che il numero delle mele deve essere pari e quello delle pere deve essere dispari perché il totale è 25. Poi si fanno delle prove per scoprire che il problema non ha soluzioni.

Nella scuola media, se si indica con x il numero delle pere, il problema si traduce nella equazione

$$x + 2x = 25$$

Cioè $3x = 25$ che non può avere soluzioni in numeri interi. I dati contraddittori sono: 25 e il doppio.

Fatta la scoperta si può lanciare la sfida: come deve essere il totale dei frutti perché, nelle stesse condizioni, il problema sia risolubile. E' un problema che nasce da un problema ed ha una pluralità di soluzioni.

1.5 – La varietà dei problemi può riguardare anche la **pluralità dei metodi di soluzione**, cioè delle strategie da mettere in atto.

L'insegnante deve prevedere le possibili strategie che un bambino potrebbe usare nella ricerca della soluzione, per essere pronto, in classe, a valutarle, confrontarle e indicare la migliore (la più semplice, la più bella, la più economica, la più efficace).

Esempio.

La base segreta

"Marco ha imparato a scrivere i numeri in diverse basi.

Un giorno stava giocando con 18 palline.
Senza farsi vedere le ha raggruppate e poi ha scritto il numero delle palline in una base segreta: 33 (si legge tre tre).

Disegna le 18 palline e trova la base segreta.

Spiega il tuo ragionamento."

Potete vedere le diverse strategie usate dai bambini di terza elementare sul Quaderno 18 (pag. 16-20).

Provate a risolvere ora il problema e poi confrontiamo le strategie che avete usato.

1.6 - L’insegnante deve fare una “**analisi a priori**” del problema per

- valutare le difficoltà del problema: un problema troppo difficile può avere effetti devastanti sull’autostima degli alunni
- determinare gli obiettivi sia di carattere matematico, sia di carattere comportamentale per vedere come un alunno si comporta davanti a una difficoltà, se si accontenta di una soluzione o ne ricerca altre, se si impegna a capire il problema senza passare subito a fare i conti, se cerca una pluralità di strategie e di linguaggi, ecc. Da questo punto di vista mi sembra significativo, oltre che matematicamente ricco, il seguente problema assegnato in una quinta elementare:

“Disegnare tutti i quadrilateri che hanno le diagonali perpendicolari e fare una classificazione dei quadrilateri disegnati.”

E’ un problema difficile, che richiede un tempo adeguato e che può essere ripreso in momenti diversi. Diversi sono stati i comportamenti degli alunni: chi si è fermato alle figure “canoniche” (rombo e quadrato), chi ha fatto rientrare anche deltoide e trapezio isoscele e chi si è spinto anche ai quadrilateri concavi. Qualcuno ha usato anche la strategia più intelligente, cioè “ho costruito le figure sulle sue diagonali”.

2 – IN CLASSE

Come comportarsi in classe quando si assegna un vero problema? Non ci sono condotte standard, da osservare sempre, ma qualche atteggiamento può essere sempre seguito.

2.1 – La prima cosa da fare è quella di creare un **clima disteso, sereno**. Dovrebbe essere il clima normale in tutta l’attività didattica, ma è ancor più necessario nella soluzione dei problemi che richiede allo studente un impegno maggiore. Ci sono bambini che quando devono risolvere un problema sono presi da un senso di panico, di paura, di angoscia. La soluzione di un problema non deve diventare un dramma per nessuno. Per creare questo clima di serenità può essere utile assegnare anche dei **problemi – gioco** istruttivi e divertenti.

Sui numeri di marzo e di maggio della rivista (2013) ho pubblicato due articoli di giochi matematici commentati. Ne ho in programma altri due. Avete un’ampia possibilità di scelta.

2.2 – L’insegnante deve stabilire con gli studenti un **chiaro, preciso ed esplicito contratto didattico**. Ogni insegnante ha un suo contratto didattico che, spesso, è implicito ed è formato da atteggiamenti, comportamenti, attese, aspettative, reazioni, richieste, valutazioni. Nella soluzione dei problemi bisogna esplicitare il contratto didattico. Per esempio

- Dire esplicitamente che la cosa più importante non è trovare la soluzione, ma **l’impegno** che ciascuno deve mettere nel cercare la soluzione. In questo modo si possono evitare tentazioni di copiature, di scoraggiamento davanti alle difficoltà con conseguente abbandono delle attività.

- Sottolineare che sono più importanti **le strategie, i metodi** di soluzione che non il risultato finale. E in questa ricerca delle strategie gli alunni devono sentirsi liberi di seguire le proprie idee, le proprie intuizioni, il proprio linguaggio.

- Sottolineare che tutti gli **errori** hanno qualcosa di positivo e, in questo senso, possono ricevere una valutazione positiva.

- Stabilire se l'attività deve essere svolta nel silenzio oppure se si possono fare domande all'insegnante

- Richiedere che strategie, errori, soluzioni siano **descritte** sul proprio quaderno in modo da poter comunicare tutto ai compagni durate la discussione collettiva. A proposito di questa descrizione c'è da aspettarsi di tutto: nulla, poco, poco con cancellature, ma anche ragionamenti articolati e ben fatti.

Ecco un esempio.

L'ottavo posto

"Gli alunni di terza B sono allineati lungo una parete della palestra. La maestra osserva che, contando da sinistra, l'ottavo bambino è Giovanni e porta gli occhiali. Osserva anche che, contando da destra, è Marco l'ottavo bambino e porta anche lui gli occhiali.
Fra i due ci sono 3 bambine.
Quanti potrebbero essere gli alunni della terza B?
Rappresenta la situazione."

Ecco come Elisa descrive la soluzione che ha trovato.

"I bambini della terza B potrebbero essere 19 perché ho fatto i disegni e se Giovanni a sinistra è l'ottavo bambino allora alla sua sinistra ci sono 7 bambini e sono già 7+1. Poi se Marco è alla destra di fianco a lui che l'ottavo e sta a destra di fianco a lui ci sono sempre 7 bambini. Allora è ancora 7+1 e poi in mezzo a Marco e Giovanni ci sono 3 bambine e allora è +3. Allora mi è venuta questa operazione: 7+1+7+1+3=19".

2.3 – L'insegnante deve rendersi conto se i bambini hanno **capito il problema**. E' una fase molto delicata perché gli alunni tendono immediatamente a ricercare la soluzione. A questa fase bisogna dedicare tutto il tempo necessario. Per esempio si può fare una lettura collettiva del problema domandando il significato delle parole chiave, che cosa il problema offre (i dati, le informazioni) e che cosa il problema richiede. Si potrebbe anche far riscrivere il problema ai bambini, ma usando parole proprie.

2.4 – Uno dei difetti dei cosidetti "problemi" dei sussidiari è la **monotonia.** Si studia l'addizione e si danno problemi sulla addizione; si passa alla sottrazione e si danno problemi sulla sottrazione. Se intervengono le due operazioni si avverte: Attenzione! Si richiedono due operazioni. Inoltre la maggior parte dei problemi sono problemi di numeri anche quando si dice che sono problemi di geometria. I bambini si fanno l'idea che tutti i numeri che compaiono nel testo devono essere usati e che la soluzione dovrà essere un numero. Celebre, da questo punto di vista, è il problema di Peano: Nel porto di Genova c'è un barcone con a bordo 50 pecore e 20 capre. Il barcone è lungo 30 metri. Qual è l'età del capitano del barcone?

I problemi da proporre in classe devono essere di tipo diverso: problemi con numeri e problemi senza numeri, problemi con dati significativi e con dati inutili; problemi veri di geometria, di misura, di statistica, di probabilità, ecc.

2.5 – L'insegnante deve orchestrare una **discussione finale** dopo aver letto e corretto l'elaborato dei bambini. La discussione serve per capire meglio i ragionamenti dei bambini, per confrontare le loro strategie risolutive ed, eventualmente, indicarne vantaggi e svantaggi, per sottolineare eventuali dati superflui o contraddittori, per rimarcare eventuali aspetti positivi degli errori, per proporre varianti al problema, per sottolineare i contenuti matematici.

Sulla discussione collettiva, non solo a proposito di problemi, si può utilmente leggere:

M. Bartolini Bussi, La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, parte prima, gennaio 1989, parte seconda, maggio 1989, scaricabili dal sito del Centro Morin.

PARTE SECONDA

PROPOSTE DI PROBLEMI

1 – INTRODUZIONE

In questa seconda parte propongo un certo numero di problemi presi da varie fonti. Saranno, grosso modo, suddivisi per aree, ma non per classi. O meglio: di alcuni, seguendo le indicazioni della "fonte" proporrò anche la classe nella quale è possibile svolgerli. Si tratta, però, di "indicazioni" che possono non rivelarsi adatte per la classe indicata. Molti saranno fattibili anche nella scuola elementare, altri saranno per la scuola media. Conviene tener presente, però, che problemi per la scuola elementare possono essere proposti anche nella scuola media, da risolvere con strumenti diversi. I problemi saranno più o meno ampiamente commentati. Gli aspetti didattici, che possono riguardare la formulazione del problema, la classe in cui proporlo, gli strumenti concettuali da usare, il materiale da utilizzare, il linguaggio da usare nella soluzione, dovrebbero emergere dalle discussioni che dovrebbero seguire ogni problema.

CAPITOLO 6

PROBLEMI CON LA CALCOLATRICE:ALLA SCOPERTA DI REGOLARITA' RIPOSTE, MA ENTUSIASMANTI

Do per acquisita la convinzione che anche alla scuola elementare si può efficacemente ed intelligentemente usare la calcolatrice, tascabile o inserita nel PC. Ne parlavano già i programmi del 1985 per la scuola elementare e quelli del 1979 per la scuola media.

Nel Quaderno Didattico 21 propongo l'uso della calcolatrice già in prima elementare. Non bisogna aver paura della tecnologia; si tratta di usarla quando serve, nella misura in cui serve ed in modo intelligente.

Con la calcolatrice si possono affrontare problemi che richiedono calcoli che, se fatti a mano, sarebbero noiosi. Però, non si tratta solo di fare calcoli, ma anche di ipotizzare regole, verificarle e scoprire regolarità numeriche. Nel mondo dei numeri naturali ci sono regolarità abbastanza scontate ed un pò monotone. Per esempio, ogni due numeri consecutivi uno è pari ed uno è dispari, ogni tre numeri consecutivi c'è un multiplo di 3, ecc. Ce ne sono, però, altre inaspettate, che possono essere scoperte anche alla scuola elementare. Ecco qualche esempio.

Esempio uno.

L'insegnante scrive alla lavagna o su un foglietto da consegnare a ciascun ragazzo le espressioni che seguono:

9 x 9 + 7 = 88; 98 x 9 + 6 = 888; 987 x 9 + 5 = 8888

Invita, poi, gli alunni a verificare l'esattezza dei calcoli su una calcolatrice che, ovviamente, deve essere a disposizione di tutti.

Il problema non è espresso a parole, ma solo con uguaglianze numeriche che devono essere lette e comprese per poter continuare. Qui incomincia il lavoro individuale (o di piccoli gruppi) per scoprire le regole.

- La prima regola che salta all'occhio è che il risultato deve essere composto solo con la cifra 8.
- La seconda regola è che nel primo membro della uguaglianza c'è un prodotto ed una somma.
- La terza regola è che il numero di 8 che compongono il risultato è uguale al numero delle cifre che compaiono nel prodotto del primo membro.
- Inoltre, in ogni uguaglianza vi è un dato fisso (la moltiplicazione per 9), un primo dato variabile (il moltiplicando), un secondo dato variabile (il numero che viene sommato al prodotto) ed un terzo dato variabile (il risultato).

- Leggendo attentamente le tre uguaglianze non dovrebbe essere difficile scoprire la “regola” di formazione del primo membro della uguaglianza per ottenere sempre un risultato formato solo dalla cifra 8.

L’intervento della calcolatrice è fondamentale per evitare calcoli noiosi che si possono facilmente sbagliare. Un risultato errato può scatenare una “caccia all’errore” che può dipendere da una errata comprensione della “regola” oppure da un errore di battitura dei tasti. E’ bene, quindi, ad ogni passo confrontare i risultati. Usando la calcolatrice i bambini potrebbero arrivare fino all’ultimo termine:

98765432 x 9 + 0 = 888888888

A questo punto qualche bambino particolarmente sveglio (oppure lo stesso insegnante) potrebbe porre il problema: posso modificare ancora il prodotto scrivendo 987654321 x 9 e 9876543210 x 9 e ottenere ancora un risultato formato solo dalla cifra 8? Si fanno ipotesi, tentativi, verifiche. Alla fine ci si può accorgere che per ottenere un risultato formato solo dalla cifra 8 bisogna sottrarre 1: 987654321 x 9 – 1 = 8888888888.

Si può fare anche l’ultimo passo: 9876543210 x 9 – 2 = 88888888888.

Esempio due.

L’insegnante scrive alla lavagna le seguenti uguaglianze:

1 x 1 = 1; 11 x 11 = 121; 111 x 111 = 12321; 1111 x 1111 = 1234321.

Fin qui i conti possono essere fatti a mano oppure i bambini possono verificali sulla calcolatrice. Leggendo le uguaglianze i bambini dovrebbero incominciare a scoprire delle regolarità:

- I fattori del prodotto sono uguali;
- le cifre del risultato aumentano sempre di due;
- le cifre del risultato sono in “scala ascendente” fino a un massimo per poi incominciare a discendere. Il massimo è stabilito dal numero di 1 dei fattori.

I conti possono continuare con la calcolatrice per vedere se le regolarità permangono. E effettivamente si mantengono fino a che i fattori sono formati da nove cifre 1. Non c’è nessun motivo per fermarsi a nove 1. Proviamo a vedere che cosa succede se i fattori sono formati da dieci cifre 1 oppure da undici cifre 1. Andiamo incontro ad una delusione: la regolarità cessa.

Esempio tre

L’insegnante scrive alla lavagna le seguenti uguaglianze:

1 x 8 + 1 = 9; 12 x 8 + 2 = 98; 123 x 8 + 3 = 987…

Contemplando queste uguaglianze i ragazzi dovrebbero scoprire le regole per poter proseguire.

- Nel prodotto il secondo fattore (8) resta fisso, mentre il primo fattore varia con legge abbastanza evidente.

- Il secondo addendo aumenta sempre di 1.
- Anche il risultato presenta una regolarità abbastanza evidente.
- Il numero delle cifre del risultato è sempre uguale al numero delle cifre del primo fattore.

I ragazzi potrebbero continuare le uguaglianze in modo meccanico in base alle regole scoperte, ma ogni volta usare la calcolatrice per fare le necessarie verifiche.

Si prosegue fino a

123 456 789 x 8 + 9 = 987 654 321.

Poi la regolarità cessa comunque si vari il primo fattore ed il secondo addendo.

Si potrebbe anche cercare di far scoprire la "legge abbastanza evidente" con cui varia il primo fattore. Nel passaggio dalla prima alla seconda uguaglianza il primo fattore diventa 1 + 11, cioè 1 + (10 + 1); nel passaggio dalla seconda alla terza il primo fattore diventa 12 + 111, cioè 12 + (110 + 1); nel passaggio dalla terza alla quarta il primo fattore diventa 123 + 1111 cioè 123 + (1110 + 1), ecc.

Esempio quattro.

L'insegnante scrive alla lavagna le seguenti uguaglianze:

1 x 9 + 2 = 11; 12 x 9 + 3 = 111; 123 x 9 + 4 = 1111…

Contemplando queste uguaglianze è facile scoprire le regole:

- Il secondo fattore rimane fisso
- Il primo fattore varia con la legge vista nell'esempio precedente
- Il secondo addendo aumenta sempre di 1
- Il numero delle cifre del risultato è uguale al numero delle cifre del prodotto.

L'ultima uguaglianza è : 123456789 x 9 + 10 = 1111111111.

Poi la regolarità cessa.

Si può utilizzare questo esempio per far vedere che in queste uguaglianze non c'è niente di casuale né di magico.

Consideriamo, per esempio, l'uguaglianza: 1234 x 9 + 5 = 11111.

Tenendo presente l'esempio precedente scriviamo 1234 nella forma:

1234 = 1111 + 111 + 11 + 1. Ne segue che

1234 x 9 = (1111 + 111 + 11 + 1) x 9 = 9999 + 999 + 99 + 9.

Aggiungendo 5 scritto nella forma 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 otteniamo

(9999 + 1) +(999 + 1) +(99 + 1) +(9 + 1) + 1 = 10 000 + 1 000 + 100 + 10 + 1 = 11 111.

In questo modo si possono giustificare tutte le uguaglianze scritte.

NOTA

Questi giochi saranno pubblicati anche nel terzo degli articoli dedicati ai giochi matematici.

Potete trovare un vasto materiale sulle regolarità numeriche nel libretto

W.H. Glenn e D.A. Johnson (1969), *Regolarità nei numeri*, Zanichelli, Bologna.

In esso non si parla dell’uso della calcolatrice dato che la prima edizione in inglese è del 1961.

CAPITOLO 7

PROBLEMI DI ARITMETICA

INTRODUZIONE

I problemi di aritmetica sono i più popolari, i più diffusi ed i più utilizzati nelle attività didattiche.

Trovate molti problemi in

M. Ferrari, *Insegnare matematica nella scuola primaria. Una proposta suddivisa per anni. Aritmetica.* Quaderno Didattico N. 21, CRDUM, 2009. Al termine delle attività proposte per ogni classe trovare un elenco di problemi. Complessivamente i problemi proposti sono 127.

Molti di questi problemi sono tratti da

M. Ferrari, *Insegnare matematica in prima elementare. Una proposta*, IMSI, Parte seconda, marzo 2004; Parte terza, luglio 2004; Parte quarta, marzo 2006.
M. Ferrari, *Matematica per la seconda elementare*, IMSI, parte prima, marzo 2007, parte seconda, maggio 2007, parte terza, settembre 2007 che si possono scaricare dal sito del Centro Morin.

Trovate questi problemi, insieme ad altri, nel Capitolo 10 "Finale sui problemi" del materiale del corso di aggiornamento domenicale del 2011-2012 dal titolo "Alla ricerca delle virtù nascoste dei numeri e dei loro risvolti didattici".

Io propongo solo alcuni problemi che possono servire da modello per inventarne altri.

PROBLEMI

I problemi 1 – 10 sono tratti dal Quaderno 21, classi prima e seconda. Gli enunciati sono uguali, ma i commenti spesso sono più estesi. Il fatto che i problemi siano proposti per la prima e la seconda non ha niente di tassativo. E' una proposta che può essere discussa e rifiutata.

Problema 1: un incarico importante
La maestra incarica Eugenio di contare gli alunni della prima A e Rolando di contare gli alunni della prima B. Eugenio impiega 5 minuti per svolgere il suo compito mentre Rolando ne impiega 7. Sono di più gli alunni della prima A o della prima B?

Io credo che non sia azzardato assegnare già in prima elementare un problema come questo. Anzi, sono convinto che problemi di questo tipo vadano distribuiti lungo tutto il primo ciclo scolastico in modo da evitare la nascita dell'idea, molto diffusa, che ogni problema matematico abbia una ed una sola soluzione che si trova, se ci sono dati numerici, con qualche operazione su questi dati. Famoso, ormai, è il problema dell'età del capitano: "Su una nave sono imbarcate 20 pecore e 2 cavalli. Qual è l'età del capitano?"[Ho già riportato una variante di questo problema]

Nel nostro problema non è escluso che i bambini si lascino ingannare dal tempo impiegato dai due bambini a contare. Si può impiantare una discussione per arrivare alla conclusione che non si può dare una risposta perché Rolando potrebbe essere più lento nel contare, oppure che li ha contati due volte per essere sicuro del risultato.

Problema 2: perché non di più?
Quante domeniche ci possono essere al massimo in un mese? Perché?

Il calendario è uno strumento molto utile nelle attività didattiche e conviene usarlo fin dalla classe prima. Con esso si imparano il numero ed il nome dei mesi, il numero di giorni di ogni mese memorizzando la filastrocca "30 giorni ha novembre con april, giugno e settembre, di 28 ce n'è 1, tutti gli altri ne han 31". Il calendario dà la prima idea della linea dei numeri, anche se manca lo 0 e si ferma al 31. Il calendario è fonte di molti problemi sia all'interno dei singoli mesi sia con lo scavalco del mese. Raccomando la lettura dell'articolo
C. Bonotto, R. Baccarin, M. Basso, M. Feltresi, *Il calendario come veicolo per la modellizzazione matematica,* IMSI, gennaio 2010, scaricabile direttamente dal sito del Centro.

Nel nostro problema una difficoltà può nascere dalla espressione "al massimo". Se ne discute con i bambini per appurarne il significato. Prima di risolvere il problema conviene esplorare il calendario e contare le domeniche di ogni mese. Ci si rende conto che in alcuni mesi ci sono quattro domeniche ed in altri cinque. Si va alla ricerca del perché, avendo la consapevolezza che la cosa non è facile. Si potrebbe incominciare ad esplorare con quale giorno della settimana iniziano i mesi nei quali ci sono cinque domeniche, per fare poi delle congetture del tipo: supponiamo che la domenica sia il primo giorno del mese. Che giorno sarà la seconda domenica? E la terza? Ecc. Si può anche continuare con : supponiamo che la domenica sia il 2. Quando sarà la seconda? Ecc.
Se questo problema, presentato in prima, viene ripreso in seconda si può giungere a qualche conclusione generale come: se la domenica cade il primo giorno del mese, allora la quinta cade il 29 e tutti i mesi, tranne febbraio, possono avere cinque domeniche; se la domenica cade il secondo giorno del mese, allora la quinta cade il 30 e ancora tutti i mesi possono avere 5 domeniche; se cade il terzo giorno del mese, allora la quinta domenica cade il 31 e solo i mesi con 31 giorni possono avere 5 domeniche. In questo scenario il mese più povero di domeniche è sempre febbraio. Però… se il mese è bisestile anche lui potrebbe avere 5 domeniche.

Problema 3: un volo ingannatore
Su un albero del giardino ci sono 4 farfalle. Ne arrivano altre 5 e si mettono tutte a volare. Quante farfalle sono rimaste sull'albero?

Il problema può sembrare abbastanza stupido e, in effetti, lo è per un lettore attento. Conviene, però, ricordare la definizione di problema data da un ragazzo di 11 anni, che esprime una convinzione diffusa: *"Un problema è quando abbiamo dei numeri in mezzo a delle parole e dobbiamo fare delle operazioni con quei numeri lì"*. La forza di attrazione dei numeri nei problemi aritmetici porterà a rispondere "9", tanto più che la risposta esatta, zero, non si ottiene con nessuna operazione con 5 e 4.

Problema 4: un gioco tra animali

Una lumaca ed una rana stanno giocando sulla linea dei numeri. La lumaca fa sempre passi di lunghezza 1 e la rana fa sempre salti di lunghezza 2. Se partono dalla tana dello 0 e vogliono arrivare alla tana dell'8 quanti passi deve fare la lumaca? Quanti salti deve fare la rana?
Se partono dalla tana dello 0 chi arriva prima alla tana dell'8?
La rana dice alla lumaca: partiamo insieme, tu dalla tana del 3 e io dalla tana dello 0 e vediamo chi arriva primo. Secondo te chi arriva primo?
Per arrivare insieme alla tana dell'8 da quale tana deve partire la lumaca (la rana parte sempre dalla tana dello 0)? Da quale tana deve partire la lumaca per arrivare prima alla tana dell'8?

Il problema è lungo e, in prima, va spezzettato in sotto problemi, da assegnare anche in giorni diversi. Il problema potrebbe essere "agito" dai bambini, due per volta, utilizzando una linea dei numeri abbastanza vistosa depositata sul pavimento dell'aula. La domanda "chi arriva prima" potrebbe far pensare alla velocità di movimento dei due bambini. E' necessario, quindi, precisare che la velocità non c'entra: il tempo che la lumaca impiega a fare un passo, lo impiega la rana a fare un salto. Le risposte di carattere matematico sono semplici e richiedono solo il contare. Insieme al gioco del contare, però, vi è anche il gioco del congetturare e del verificare. Dalla discussione finale potrebbero nasce frasi di tipo ipotetico come: se la lumaca parte dalla tana del… allora…
Le varie situazioni possono essere descritte efficacemente con il linguaggio delle frecce.

Problema 5: le vacanze: bello farle, ma non contarle

L'anno scorso le vacanze sono iniziate il 13 giugno. Siamo ritornati a scuola il 10 settembre. Quanti giorni di vacanza abbiamo fatto?

Questo è uno dei tanti problemi che si possono inventare utilizzando il calendario. Nonostante le apparenze, il problema, almeno secondo la nostra esperienza, risulta difficile, se proposto in seconda. Penso, però, che sia bene che i ragazzi vi si cimentino. Dal punto di vista linguistico c'è da notare la diversità tra l'inizio delle vacanze, che viene esplicitamente detto, e la fine che viene enunciata con il "ritorno a scuola". La soluzione del problema può essere raggiunta con diverse strategie.

- La strategia esclusiva del conteggio dal 13 giugno al 9 settembre. E' la strategia che richiede più tempo e soggetta, forse, più facilmente ad errori.
- La strategia esclusivamente additiva: 18 + 31 + 31 + 9 (ovviamente il 18 si trova contando).
- La strategia mista additiva e moltiplicativa: 18 + 31 x 2 + 9
- La strategia matematicamente più ricca: (30 – 12) + 31 x 2 + 9

Realisticamente non è pensabile che quest'ultima strategia venga usata spontaneamente in seconda. Potrebbe essere suggerita in terza aggiungendo al problema una frase del tipo: "esprimi il numero dei giorni di vacanza usando una espressione con tre operazioni diverse".

Problema 6: i due cugini

Erika e Stefano sono cugini e fra loro ci sono 5 anni di differenza. Quanti possono essere gli anni di Erika e quanti quelli di Stefano?

I bambini possono trovarsi disorientati davanti a questo problema. Vorrebbero sapere quanti anni ha uno dei due cugini o, almeno, chi è nato prima. Possono essere due problemi preparatori a questo.
Questo problema ha infinite soluzioni date dalle coppie ordinate (n, n + 5), dove n è il numero degli anni di uno dei due cugini. In questo problema, rispetto ai due suggeriti come preparatori, le

informazioni, e, quindi, i vincoli sono ridotti al minimo. Aumenta, quindi, la libertà di scelta delle coppie di numeri e la loro interpretazione. In questa prospettiva si devono accettare anche soluzioni evidentemente fuori dalla realtà come (250, 255). E' proprio il caso di dire che la matematica esprime la realtà, ma anche la supera.

Problema 7: i due compagni
Luca e Francesco sono nati nello stesso anno e nello stesso mese di gennaio. Luca è nato il 31 gennaio. Francesco è nato dopo il giorno della Befana. Quanti giorni di differenza ci possono essere fra le età dei due ragazzi?

Gli alunni devono trovare il "dato nascosto" cioè il giorno in cui cade la festa della Befana. Per la nascita di Francesco vanno bene tutti i giorni dal 7 di gennaio fino al 31 compreso. Difficilmente, però, i bambini considereranno anche quest'ultima possibilità. Essa può nascere dalla discussione collettiva. E' un problema che può avviare al ragionamento ipotetico: se Francesco è nato il 7 gennaio allora i giorni di differenza sono…

Problema 8: di quale squadra sarà tifoso Roberto?
Roberto ha 35 figurine di calciatori. 7 figurine rappresentano giocatori dell'Inter e 5 rappresentano calciatori del Milan. Quante figurine non rappresentano calciatori dell'Inter?

Il problema sembra di una semplicità disarmante. Bisogna, però, tener presenti due aspetti:
- Il primo è che il numero 5 è "muto", non entra in linea di conto, è un distrattore che potrebbe essere sostituito da qualsiasi altro numero "ragionevole"
- Il secondo è che la sottrazione, che deve interessare i numeri 35 e 7, è nascosta dalla negazione "non" e non è immediato accorgersene.

Problema 9: viaggiare con il bus
La mamma di Fortunata deve andare al mercato con i suoi 3 figli. Ogni biglietto dell'autobus costa 80 eurocent. La mamma di Fortunata li compera dal cartolaio e paga con una banconota da 5 euro. Quanto riceve di resto?

Questo problema merita una attenta lettura perché presenta alcune "trappole". La prima riguarda il numero dei biglietti dell'autobus che la mamma compera. La sottolineatura dei 3 figli può far pensare che la mamma comperi solo 3 biglietti e non 4. La seconda riguarda la moltiplicazione, come addizione ripetuta, per conoscere la spesa per i biglietti. Questa operazione è abbastanza "nascosta". Infine, per rispondere alla domanda del problema, bisogna convertire gli euro in centesimi di euro. Naturalmente per poter affrontare il problema i bambini devono avere qualche conoscenza degli euro, degli eurocent e di quanti eurocent vale un euro. Il problema potrebbe essere risolto collettivamente.

Problema 10: sempre frutti sono
In un cesto ci sono 18 frutti; alcuni frutti sono pere e altri mele. Le mele sono il doppio delle pere. Quante sono le pere? Quante le mele?

Questo problema, assegnato in seconda, dovrebbe essere abbastanza abbordabile. Forse la cosa più interessante è vedere il tipo di ragionamento che fanno i bambini. In seconda una strategia vincente potrebbe essere quella degli esperimenti che conducono a costruire una tabella di questo tipo.

Numero pere	numero mele	totale
1	2	3
2	4	6
…	…	…
5	10	15
6	**12**	**18**

In terza o in quarta il problema potrebbe essere utilizzato per avviare un discorso simbolico. Indicando con p il numero delle pere e con m il numero delle mele, la prima informazione del problema porta alla equazione: $p + m = 18$.
La seconda informazione (le mele sono il doppio delle pere) consiglia di scrivere 2p al posto di m. Otteniamo così l'equazione: $p + 2p = 18$ cioè $3p = 18$. Questa uguaglianza ci dice che 18 è multiplo di 3. Posso fare, quindi, $18 : 3 = 6$ che da il valore di p. In conclusione le pere sono 6 e le mele 12.
Se non si possiedono ancora gli strumenti concettuali per procedere in questo modo, si può trasformare l'equazione: $p + 2p = 18$ nella equazione: $p + p + p = 18$ ed andare alla ricerca del numero che sommato a se stesso tre volte dà 18.

Nella scuola secondaria di primo grado si può parlare esplicitamente di incognita ed indicarla, come si fa di solito, con x. Essa può indicare indifferentemente il numero delle pere oppure il numero delle mele. Nel primo caso, ed è migliore questa scelta, si perviene alla equazione: $3x = 18$ cioè $x = 6$ (numero delle pere); nel secondo caso si perviene alla equazione: $x + x/2 = 18$ cioè $3x = 36$. Ne consegue $x = 12$ (numero delle mele).

Il problema proposto può dare origine a nuovi problemi. Enunciato in forma generale: se in un insieme ci sono due tipi di oggetti e quelli di un tipo sono il doppio di quelli dell'altro tipo, quanti possono essere gli oggetti in totale?
Si fanno delle prove: con 18 le cose funzionano, mentre con 19 e 20 no. Con 15 le cose funzionano mentre con 16 e 17 no. Alla fina di queste prove si dovrebbe concludere che il numero degli oggetti, in totale, deve essere multiplo di 3.

Come si vede gli enunciati dei problemi sono leggermente differenti (cambia il totale degli oggetti), ma alcuni sono insolubili per la presenza di una contraddizione tra i dati.

I prossimi due problemi sono tratti dalla prova di matematica dell'INVALSI per la seconda classe, anno 2008-2009.

Problema 11: alla caccia del numero
Trova il numero che è nascosto dalla macchia: ● $– 18 = 7$.

Le soluzioni proposte, tra le quali scegliere quella esatta, sono : A = 11; B = 15; C = 25.
Qualcuno potrebbe dire che questo non è un problema perché manca la domanda. In un problema la domanda, cioè ciò che è richiesto, può essere espressa in modi diversi. Ad ogni modo, se lo si ritiene utile, si può formulare il problema sotto forma di domanda: "Qual è il numero nascosto dalla macchia?"
I bambini potrebbero usare diverse strategie:
- La strategia della esclusione: si escludono immediatamente i numeri 11 e 15 (i minuendi) perché sono minori del sottraendo;

- La strategia del conteggio (la strategia del bottegaio che deve dare il resto): si contano in avanti 7 passi, a partire da 18, usando il calendario o la retta dei numeri;
- La strategia "semantica" cioè del significato della differenza: se la differenza fra un primo numero ed un secondo è 7 allora devo aggiungere 7 al secondo numero per ottenere il primo.

E' ovvio che se il problema viene proposto senza le tre possibili soluzioni, non funziona più la prima strategia.

Problema 12: chi ha indovinato?
Carlo pensa un numero, aggiunge 26 e ottiene 41. Chi tra Matteo, Laura e Chiara indovina il numero che Carlo ha pensato? Matteo: 25; Laura: 15; Chiara; 67.

Anche in questo problema funziona bene "la strategia della esclusione". Si esclude il numero 67 perché è maggiore del risultato della addizione. Qualche bambino, però, potrebbe scegliere proprio 67 perché è la somma dei due dati espliciti del problema. E' da escludere il 25 perché già sommando 20 a 26 si va al di la del risultato.
Funziona sempre la "strategia del conteggio" iniziando da 27, ma è decisamente poco economica.
La strategia migliore consiste nel ricorrere alla sottrazione, nonostante il verbo "aggiunge". Bisogna, però, che i bambini abbiano una certa familiarità con la sottrazione.

NOTA PREVIA

Il problema che ora propongo l'ho visto per la prima volta, senza commenti, in "Matematica in terza classe" (a cura di Renato Reggiori) del Dipartimento della Pubblica Istruzione del Canton Ticino. E' stato ripubblicato con lo stesso titolo e lo stesso curatore dall'Istituto Geografico De Agostini, dal quale l'ha preso la Franca Ferri nel volume citato in bibliografia nella prima parte. Qui il problema appare nel capitolo IV nel quale si fa un'analisi a priori e nel Capitolo VI nel quale si descrive una sperimentazione didattica in una classe terza.

Problema 13: giocando con le biglie

"Stefano e Silvia giocano a biglie. Per una partita vinta Stefano riceve 3 biglie. Siccome è più piccolo, per ogni partita che perde deve dare a Silvia soltanto 2 biglie.

Quando i due amici smettono di giocare Stefano ha vinto 10 biglie. Quante partite ha vinto Stefano? Quante partite ha vinto Silvia? Quante partite hanno giocato?"

Di questo problema vi propongo una "analisi a priori" a livello adulto, che segue abbastanza da vicino, con diverse variazioni, quella della Ferri.

Primo passo: *individuare le incognite e nominarle (cioè dare un nome).*

Indichiamo con x il numero delle partite vinte da Stefano, e con y il numero delle partite vinte da Silvia (e quindi perse da Stefano). Nessuna partita finisce in parità. Allora il numero totale delle partite giocate è x+y.

Secondo passo: *matematizzare il problema*.

Cerchiamo di tradurre il problema verbale in una equazione.

In x partite Stefano vince 3x biglie; in y partite vinte da Silvia, Stefano perde 2y biglie. Siccome alla fine Stefano ha vinto 10 biglie l'equazione è:

3x – 2y = 10 $\boxed{1}$

Questa è una equazione di primo grado in due incognite da risolvere in numeri naturali perché $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Una equazione di questo tipo si dice diofantea, in onore di Diofanto, matematico greco del III secolo dopo Cristo.

Prima contemplazione

Risolvere l'equazione $\boxed{1}$ significa trovare una coppia, almeno, di numeri naturali (x, y) che rendano vera l'uguaglianza.

Quale informazioni ci fornisce l'equazione?

- Deve essere $\mathbf{x} \geq 0$ e $\mathbf{y} \geq 0$ perché si tratta di partite giocate.
- Siccome la coppia di numeri (0,0) non verifica l'equazione, possiamo dire che almeno uno dei due numeri deve essere maggiore di zero.
- Non può essere x = 0 perché 0 -2y non può essere uguale a 10; non può essere y = 0 perché 3x – 0 non può essere uguale a 10.
- **Quindi x e y sono maggiori di zero.**

Seconda contemplazione

- x deve essere un numero pari. Se, infatti, fosse dispari, anche 3x sarebbe dispari e la differenza fra un dispari e un pari (2y) non può essere un numero pari (10). Quindi x è un numero pari, cioè x = 2n con n=1, 2, 3,4,...
- Stefano ha vinto <u>almeno</u> 2 partite (n = 1); ma con 2 sole partite vinte guadagnerebbe 6 biglie e non 10. Quindi Stefano ha vinto almeno 4 partite (n = 2).
- **Qui nasce la prima soluzione.**
  Vincendo 4 partite Stefano vincerebbe 12 biglie. Siccome in realtà ne ha guadagnate 10, allora vuol dire che ne ha persa una, vinta da Silvia. Per x = 4 e y = 1 Stefano guadagna effettivamente 10 biglie. Quindi la coppia (4,1) è una soluzione della equazione. Il totale delle partite, in questo caso, è 5.

La contemplazione continua….all’infinito

Quella trovata non è l'unica soluzione.

- Dalla $\boxed{1}$, a portando a destra 2y (e cambiando segno), a sinistra 10 (e cambiando segno) e dividendo per 2 otteniamo:

- $y = \dfrac{3x - 10}{2}$ $\boxed{2}$

Siccome x = 2n sostituendo nella $\boxed{2}$ otteniamo: $y = \dfrac{3*2n-10}{2}$ cioè y = 3n - 5

Siccome $y > 0$ deve essere $n \geq 2$. Per $n = 2$ otteniamo la soluzione (4,1)

- Per ogni $n > 2$ otteniamo le infinite soluzioni $(2n, 3n - 5)$
- Mentre $x = 2n$ è sempre pari, il numero $y = 3n-5$ è, alternativamente, dispari e pari.
- Le partite vinte da Stefano aumentano sempre di 2, quelle vinte da Silvia aumentano sempre di 3 perché 3n aumenta ogni volta di 3, mentre 5 resta fisso.
- Il numero totale delle partite è:

$$x + y = 2n + 3n - 5 = 5n - 5 = 5(n - 1)$$

cioè un multiplo di 5.

- Possiamo rappresentare tutto con questa tabella:

x	y	x + y
4	1	5
6	4	10
8	7	15
10	10	20
12	13	25
….	….	….

Questa analisi a priori che ho classificato per adulti, forse potrebbe essere svolta, sotto la regia dell'insegnante, anche in una terza media. Gli insegnanti di scuola media partecipanti al corso ne possono discutere.

E per la scuola elementare che cosa fare in classe con gli alunni? Certo non è proponibile l'analisi fatta prima, ma se l'insegnante l'ha fatta propria, la può utilizzare per orientare l'attività degli alunni.

Una volta proposto il problema, prima che gli alunni si lancino a risolverlo, è bene intavolare una discussione collettiva per vedere il significato del problema e cercare di scoprire una strategia ragionando sulle informazioni del problema stesso.

- Il numero delle biglie vinte da Stefano, essendo 3 per ogni partita vinta, può essere pari se il numero delle partite vinte è pari, oppure dispari se il numero delle partite vinte è dispari. Gli alunni devono sapere che D x P = P e D x D = D.

- Il numero delle biglie che Stefano perde è sempre pari perché perde 2 biglie per ogni partita persa. Gli alunni devono sapere che P x P = P e P x D = P.

- Siccome alla fine Stefano ha vinto 10 biglie, cioè un numero pari, bisogna che il numero delle biglie vinte in tutte le partite sia pari perché P – P = P. Quindi deve essere pari anche il numero delle partite vinte. Quindi il numero delle partite vinte da Stefano procede di 2 in 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12,…Il numero delle partite che Stefano perde può essere pari o dispari. Questo numero non si può sapere a priori, ma nascerà dalla differenza fra il numero delle biglie che potrebbe aver vinto ed il numero reale (10) delle biglie vinte.

- A questo punto scatta la ricerca di quante partite ha vinto e di quante ne ha perse.

Il numero minimo di partite che Stefano deve vincere è 4; così, però, vincerebbe 12 biglie e non 10. Quindi deve perdere 1 partita. Abbiamo, così, la prima soluzione: 4 vinte e 1 persa (vinta da Silvia). Il totale delle partite giocate è 5. Ci si può fermare qui, ma si può anche continuare e vedere che cosa succede se Stefano vincesse 6 partite, cioè 18 biglie. Per arrivare a 10 biglie vinte, deve perderne 8, cioè 4 partite. Troviamo una nuova soluzione: 6 partite vinte e 4 perse. Totale partite giocate: 10. Continuando si trovano altre soluzioni come: 8 partite vinte e 7 partite perse. Totale 15.

- Già osservando queste tre soluzioni ci si può accorgere che il numero totale delle partite è un multiplo di 5, che le partite vinte da Stefano aumentano sempre di 2 (già lo sapevamo), mentre quelle vinte da Silvia (e perse da Stefano) aumentano ogni volta di 3 (1, 4, 7). Si può allora congetturare che il prossimo numero totale delle partite sia 20 e vedere che cosa succede per verificare se la congettura è sensata. Delle 20 partite, 10 le ha vinte Stefano arrivando così a 30 biglie; deve, però, perderne 20 per arrivare a 10. Allora anche Silvia ne ha vinte 10. La congettura ha funzionato e si può continuare con il numero 25. Le cose vanno sempre bene. Si può anche osservare che fino a 15 è Stefano a vincere più partite, poi vi è il pareggio (10, 10) e poi è Silvia a vincere più partite.
- Tutte queste scoperte possono essere rappresentate con una tabella del tipo di quella sopra riportata, la quale, forse, dà maggiormente l'idea della infinità delle soluzioni.

Gli insegnanti di scuola elementare possono discutere se, a quali condizioni, in quale classe e con quale percorso didattico questo problema è proponibile.

NOTA PREVIA

Anche il problema che ora propongo l'ho preso dal volumetto della Franca Ferri. Ne faccio prima una analisi a priori seguendo le tracce della Franca Ferri, con alcune modifiche; seguiranno alcune considerazioni didattiche.

Problema 14: le gabbie di Piero

"Piero possiede 19 conigli che vuole sistemare in gabbie adatte. Il negozio nel quale si reca vende gabbie sono di due tipi: piccole e grandi. Nelle piccole ci stanno 2 conigli e nelle grandi ce ne stanno 3. Vuoi aiutare Piero a stabilire quante gabbie deve comprare?

Una gabbia grande costa 4 euro e una piccola 3 euro. Siccome Piero è un po' tirchio vorrebbe spendere il meno possibile; vuoi aiutarlo?"

Analisi a priori a livello adulto, ma penso adatta anche per la scuola media.

Primo passo: *individuare le incognite e nominarle (cioè dare un nome).*

Indichiamo con x il numero delle gabbie grandi e con y il numero di quelle piccole. Il numero totale delle gabbie è $x + y$.

Secondo passo: *matematizzare il problema*.

Cerchiamo di tradurre il problema verbale in una equazione.

Siccome in ciascuna gabbia grande ci stanno 3 conigli, allora il numero dei conigli nelle gabbie grandi è 3x.

Siccome in ciascuna gabbia piccola ci stanno due conigli, allora il numero dei conigli nelle gabbie piccole è 2y.

Il numero dei conigli da sistemare è 19.

Allora il problema si traduce nella equazione: 3x + 2y =19 $\boxed{1}$

Prima contemplazione

Risolvere l'equazione $\boxed{1}$ significa trovare una coppia, almeno, di numeri naturali (x, y) che rendano vera l'uguaglianza.

Quale informazioni ci fornisce l'equazione?

- Deve essere $\mathbf{x} \geq 0$ e $\mathbf{y} \geq 0$ perché si tratta di numero di gabbie.
- Siccome la coppia di numeri (0,0) non verifica l'equazione, possiamo dire che almeno uno dei due numeri deve essere maggiore di zero.
- Non può essere x = 0 perché 2y non può essere uguale a 19 (2y è pari e 19 è dispari);
- non può essere y = 0 perché 3x non può essere uguale a 19 (19 non è multiplo di 3).
- **Quindi x e y sono maggiori di zero: x > 0 e y > 0.**

Seconda contemplazione

- Le soluzioni dell'equazione, se ci sono, devono essere in numero finito (al massimo 20 tante quante sono le coppie di numeri amici di 19). In realtà sono di meno per via dei coefficienti di x e di y.
- x deve essere dispari perché la somma di due numeri pari non può fare 19.

  Quindi x = 2n + 1, con n = 0, 1, 2, 3, 4, 5…Quindi x può assumere i valori: 1 (per n = 0); 3 (per n = 1); 5 (per n = 2); 7 (per n = 3)
- x può assumere al massimo il valore 5 perché con x = 7 si supera 19.

Prima conclusione

L'equazione, e perciò il problema, ammette al massimo tre soluzioni: (1, y); (3, y); (5,y).

Dobbiamo trovare i valori di y.

- Per trovarli, manipolando un po' la $\boxed{1}$, con semplici passaggi

  si ottiene y = $\frac{19-3x}{2}$ $\boxed{2}$

  Siccome x = 2n+1 la $\boxed{2}$ diventa

$$y = \frac{19 - 3(2n + 1)}{2} = \frac{19 - 3 - 6n}{2} = 8 - 3n$$

Dovendo essere $y > 0$ sostituendo i tre possibili valori della n otteniamo:

$n = 0 \quad y = 8$

$n = 1 \quad y = 5$

$n = 2 \quad y = 2$

Seconda conclusione

Le soluzioni sono, quindi,

n = 0 x = 1; y = 8 → (1, 8)

n = 1 x = 3; y = 5 → (3, 5)

n = 2 x = 5; y = 2 → (5, 2)

La soluzione più economica è l'ultima.

Per la scuola elementare che cosa fare in classe con gli alunni? Certo non è proponibile l'analisi fatta prima, ma se l'insegnante l'ha fatta propria, la può utilizzare per orientare l'attività degli alunni.

Una volta proposto il problema, prima che gli alunni si lancino a risolverlo, è bene intavolare una discussione collettiva per vedere il significato del problema e cercare di scoprire una strategia ragionando sulle informazioni del problema stesso.

- Il numero dei conigli è 19, cioè un numero dispari.
- Quindi Pietro non può comprare solo gabbie piccole perché in esse ci sta sempre e solo un numero pari di conigli (2 per ogni gabbia).
- Pietro non può comprare solo gabbie grandi perché in esse può essere sistemato un numero di conigli che deve essere multiplo di 3 e 19 non è un multiplo di 3.
- Quindi Pietro deve comprare un po' di gabbie grandi ed un po' di gabbie piccole. Quante?
- Siccome nelle gabbie piccole può essere sistemato solo un numero pari di conigli, allora nelle gabbie grandi bisogna sistemare un numero dispari di conigli perché D + P = D.
- Siccome in ognuna delle gabbie grandi ci stanno 3 conigli, cioè un numero dispari, allora anche il numero delle gabbie grandi deve essere dispari perché solo D x D = D.
- Di qui può partire la ricerca del numero delle gabbie grandi.
- Questo numero può essere 1. Allora nella gabbia grande ci stanno 3 conigli; i rimanenti 16 = 19 – 3 vengono sistemati in 8 gabbie piccole. Ecco la **prima** soluzione del problema: (1, 8).
- Procediamo per vedere se ci son o altre soluzioni.

- Consideriamo 3 gabbie grandi: I conigli sistemati sono 9; i rimanenti 10 vengono messi in 5 gabbie piccole. Ecco la **seconda** soluzione del problema: (3, 5).

- Si può continuare considerando 5 gabbie grandi. I conigli sistemati sono 15; i rimanenti 4 vengono messi in 2 gabbie piccole. Questa è la **terza** soluzione del problema: (5, 2).

- Ci saranno altre soluzioni? No, perché con 7 gabbie grandi andiamo al di la di 19.

- Per i prezzi basta fare semplici conti.

NOTA PREVIA

Anche il problema che ora presento è tratto dal volumetto della Ferri. Come al solito faccio una analisi a priori e poi qualche considerazione didattica.

Problema 15: aspetta e spera…i cioccolatini

" Gli alunni della classe quarta sono 19. La loro maestra li vuole premiare, regalando due cioccolatini a testa, perché hanno partecipato con interesse e vivacità ad una discussione matematica. Entra in un negozio dove hanno soltanto confezioni da 5 cioccolatini e da 12 cioccolatini. Può comprare esattamente il numero di cioccolatini che le servono?"

Analisi a priori a livello adulto, ma penso adatta anche per la scuola media.

Primo passo: *individuare le incognite e nominarle (cioè dare un nome).*

Indichiamo con x il numero delle confezioni da 12 cioccolatini e con y il numero delle confezioni da 5 cioccolatini.

Secondo passo: *matematizzare il problema*.

Cerchiamo di tradurre il problema verbale in una equazione. E' presto fatto:

$12x + 5y = 38 \quad \boxed{1}$

Prima contemplazione

Risolvere l'equazione $\boxed{1}$ significa trovare una coppia, almeno, di numeri naturali (x, y) che rendano vera l'uguaglianza.

Quale informazioni ci fornisce l'equazione?

- Deve essere $x \geq 0$ e $y \geq 0$ perché si tratta di numero di confezioni.
- Siccome la coppia di numeri (0,0) non verifica l'equazione, possiamo dire che almeno uno dei due numeri deve essere maggiore di zero.
- Non può essere $x = 0$ perché 38 non è multiplo di 5.
- Non può essere $y = 0$ perché 38 non è multiplo di 12
- Quindi $x > 0$ e $y > 0$.

Seconda contemplazione

- Le soluzioni dell'equazione, se ci sono, devono essere in numero finito (al massimo 39 tante quante sono le coppie di numeri amici di 38). In realtà sono di meno per via dei coefficienti di x e di y.

- Inoltre deve essere: $x < 3$ perché per $x = 3$ con il contributo di 5y si supera 38; e $y < 6$ perché per $y = 6$ con il contributo di 12x si supera 38.

  Quindi x può assumere i valori 1,2 e y può assumere i valori 1,2,3,4,5

- Siccome 38 è pari e 12x è pari, anche 5y deve essere pari, cioè y deve essere pari perché P + P = P.

- Quindi $y = 2n$. Perciò y può assumere i valori 2 (per $n = 1$) e 4 (per $n = 2$).

  Prima conclusione provvisoria:

  Le soluzioni dell'equazione, e quindi del problema, possono essere al massimo due: (x, 2); (x, 4).

Non ci resta che trovare il valore di x. Manipolando un po' l'equazione $12x + 5y = 38$ otteniamo

$x = (38 – 5y) / 12 = (38 – 5 \times 2n) / 12 = 2(19 – 5n)/ 12 = (19 – 5n) / 6$. Quest'ultimo numero deve essere un numero naturale. Siccome $x = 1$ oppure $x = 2$ deve essere

$(19 – 5n) / 6 = 1 \rightarrow 19 – 5n = 6 \rightarrow 19 – 6 = 5n \rightarrow 13 = 5n$: uguaglianza impossibile.

$(19 – 5n) / 6 = 2 \rightarrow 19 – 5n = 12 \rightarrow 19 – 12 = 5n \rightarrow 7 = 5n$: uguaglianza impossibile.

Seconda conclusione definitiva (amara per gli scolari): l'equazione $12x + 5y = 38$ non ha soluzioni. Il problema è impossibile per contraddittorietà dei dati.

In classe, prima che i bambini tentino di risolvere il problema, si può ragionare insieme sui dati del problema.

La prima osservazione è che i cioccolatini da comperare sono esattamente 38. E' chiaro, è la seconda osservazione, che la maestra non può comperare solo confezioni da 12 cioccolatini perché 38 non è multiplo di 12. Neppure può comperare solo confezioni da 5 cioccolatini perché 38 non è multiplo di 5. Dovrà comperarne dei due tipi. Qui scatta la ricerca della soluzione. Facendo varie prove, eventualmente costruendo una tabella, gli alunni si accorgono che il problema, pur così semplice, non ha soluzioni sfatando la leggenda che in matematica tutti i problemi hanno una ed una sola soluzione.

A questo punto si può proporre agli alunni di modificare i dati per rendere risolubile il problema. Si possono seguire varie strade. Far diventare 40 i cioccolatini perché la maestra decide di regalarsene 2. Siccome 40 è multiplo di 5 è facile trovare la soluzione è (0, 8) cioè 0 confezioni da 12 e 8 da 5. Un'altra possibilità è che la maestra decida di regalare 3 cioccolatini ad ogni alunno. Allora i cioccolatini da comperare sono 57 e la soluzione è (1, 9). Qui si può proporre agli alunni il seguente problema: quanti cioccolatini la maestra deve regalare ad ogni alunno perché il problema abbia due soluzioni. Con 4 cioccolatini a testa la soluzione è ancora unica (3, 8); con 5 le soluzioni diventano 2: (0, 19) e (5, 7). Naturalmente si possono cambiare i tipi di confezione con la possibilità di sbizzarrirsi e di sbagliare.

Problema 16: Quante sono le prugne?

Anna aveva nella cesta 35 prugne. Ora ne ha 72. Quante prugne sono state aggiunte? Quante prugne ha Anna in tutto?

Questo, forse, può non sembrare un problema perché basta fare un piccolo conto per risolverlo. Penso, però, che sia bene assegnarlo ugualmente per vedere con quale attenzione gli alunni leggono il problema prima di passare a fare i conti. La parola "aggiunte" può suggerire la strategia del conteggio, strategia certamente legittima, ma poco economica. Meglio la strategia della sottrazione anche se sembra in contrasto con la parola "aggiunte". La risposta alla seconda domanda è contenuta nel testo del problema, ma non è escluso che qualche alunno sommi i due dati espliciti del problema.

Problema 17: la macchina strizza numeri

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Questa è la tabella dei numeri da 0 a 99. Immagina di avere una "macchina strizza-numeri" che si comporta in questo modo: tu prendi un numero qualunque, per esempio, 69 e lo metti nella macchina. Essa moltiplica fra di loro le due cifre e manda fuori 54; rimetti nella macchina 54 la quale moltiplica fra di loro queste due cifre e manda fuori 20; rimetti nella macchina 20 la quale moltiplica fra di loro queste due cifre e manda fuori 0. Qui la macchina si ferma. Ecco lo schema

del lavoro della macchina: 69 → 54→20→0. Dopo tre passaggi hai ottenuto dalla macchina un numero con una cifra e il gioco finisce se pensi questo problema come un gioco.
Mettiti a giocare usando la testa per fare meno calcoli possibile.

- *Ci sono numeri che arrivano subito al traguardo senza passaggi?*
- *E con un passaggio? E con due passaggi?*
- *C'è un altro numero che ha gli stessi passaggi del 69? Ci sono altri numeri in questa situazione?*
- *Qual è il numero che richiede più passaggi? Buon divertimento!*

Il problema si presenta abbastanza complesso ma, usando la testa, i conti da fare non sono molti.

- I numeri che arrivano subito al traguardo, cioè richiedono 0 passaggi sono quelli composti da una sola cifra.
- I numeri di due cifre richiedono sempre almeno un passaggio. Ne richiedono esattamente uno i numeri di cui una cifra è 0 (0 è l'elemento nullificante nel prodotto); quelli di cui una cifra è 1 (1 elemento neutro nel prodotto); quelli di cui una cifra è 2 e l'altra è minore o uguale di 4; quelli di cui una cifra è 3 e l'altra è minore o uguale di 3; quelli di cui una cifra è 4 e l'altra è minore o uguale di 2.
- Tutti gli altri numeri di due cifre richiedono almeno due passaggi.
- I numeri formati dalle stesse due cifre richiedono lo stesso numero di passaggi. Esempio: 69 e 96.
- Di conseguenza il numero che richiede il maggior numero di passaggi, se c'è, è un numero del tipo AA, cioè formato da due cifre uguali. Facendo le prove si scopre che è 77: 77 → 49 → 36 →18 → 8.

NOTA
Questo problema sarà pubblicato anche nel quarto degli articoli dedicati ai giochi.

Problema 18: un gesto di amicizia

Di questo problema presento due versioni, una adatta alla scuola elementare ed una che si può pensare per la scuola media.

Versione per la scuola elementare: *" Al termine di una riunione, piuttosto animata, tutti i partecipanti, in segno di amicizia, si stringono le mani. Un osservatore attento conta 15 strette di mano. Quanti erano i partecipanti alla riunione?"*

Una volta assegnato il problema conviene precisare bene le condizioni: nessuno, come è ovvio, stringe la mano a se stesso e la stretta di mano fra Tizio e Caio si conta una sola volta.

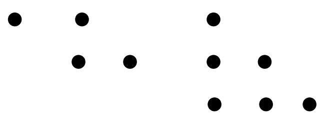
La strategia che potrebbe essere utilizzata dai bambini delle elementari che, forse, sono più attenti degli altri a scoprire regolarità potremmo chiamarla **"la strategia del certosino"** perché richiede pazienza e spirito di osservazione.
Si tratta di scrivere due colonne di numeri: nella prima si mette il numero dei partecipanti, iniziando da 1 e nella seconda il numero delle strette di mano. Dopo pochi passi, si scopre la regolarità e si arriva alla soluzione.

Numero partecipanti	numero strette di mano
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15

E’ evidente la regolarità di aumento del numero delle strette di mano nel passaggio da una situazione alla successiva: +1; +2; +3; +4; +5.
Notata questa regolarità, anche i bambini delle elementari potrebbero affrontare anche la versione per adulti.

La situazione problematica prima descritta è passibile di una efficace interpretazione geometrica.
Il caso con un solo partecipante (effettivamente un po’ strano) può essere rappresentata da un punto; la situazione con due partecipanti può essere rappresentata da due punti: il segmento che li unisce rappresenta la stretta di mano;
la situazione con tre partecipanti può essere rappresentata dai tre vertici di un triangolo: i tre lati rappresentano le strette di mano;
la situazione con quattro partecipanti può essere rappresentata dai quattro vertici di un quadrilatero: le strette di mano sono rappresentate dai quattro lati e dalle due diagonali;
la situazione con cinque partecipanti può essere rappresentata dai cinque vertici di un pentagono: le strette di mano sono rappresentate dai cinque lati e dalle cinque diagonali;
la situazione con sei partecipanti può essere rappresentata dai sei vertici di un esagono: le strette di mano sono rappresentate dai sei lati e dalle nove diagonali.

La sequenza dei numeri delle strette di mano: 1, 3, 6, 10, 15 (che può proseguire regolarmente con 21, 28, ecc.) è quella dei **numeri triangolari** così chiamati perché possono essere rappresentati, usando punti, per esempio, sotto forma di triangoli come si vede qui sotto.



Essi nascono dalle somme (S) dei primi n numeri naturali:
S(1) = 1; S(2) = 1 + 2 = 3; S(3) = 1 + 2 + 3 = 6; S(4) = 1+ 2+ 3+ 4 = 10, ecc.
La formula generale è quella ben nota della S(n): n(n+1)/2.

Versione per la scuola media: *“ Al termine di una riunione, piuttosto animata, tutti i partecipanti, in segno di amicizia si stringono le mani. Un osservatore attento conta 66 strette di mano. Quanti erano i partecipanti alla riunione?”*

Oltre alla prima strategia, comunque valida, anche se un po’ lunga, vi è una **seconda strategia** che

Può essere usata da studenti di scuola media.
Indichiamo con **x** il numero dei partecipanti. Ciascuno di essi stringe la mano a tutti gli altri, cioè agli **(x – 1)** altri partecipanti. Quindi le strette di mano sono **x (x – 1).** Siccome la stretta di mano fra Tizio e Caio si conta una sola volta, bisogna dividere questo numero per 2. Si giunge, così, alla equazione

$$\mathbf{x\,(x - 1)/\,2 = 66 \quad \text{da cui} \quad x\,(x - 1) = 132.}$$

L'equazione è di secondo grado, ma non è necessario conoscere la formula risolutiva, che non si studia nella scuola media. Basta pensare che i numeri **x – 1** e **x** sono numeri consecutivi e che il loro prodotto è **132**. Si tratta, quindi, di trovare una coppia di numeri consecutivi di due cifre il cui prodotto sia 132. Scartata la coppia (10 , 11), si trova subito la coppia (11 , 12) che va bene. I partecipanti erano 12.

Questo problema si presta bene ad un ripasso di geometria: poligoni, lati e diagonali ed i loro numeri:
triangolo: 3 lati e 0 diagonali (3 + 0 = 3)
quadrilatero: 4 lati e 2 diagonali (4 + 2 = 6)
pentagono: 5 lati e 5 diagonali (5 + 5 = 10)
esagono: 6 lati e 9 diagonali (6 + 9 = 15).
Naturalmente si può proseguire.

NOTA

Questo problema è stato pubblicato sul numero di marzo 2013 della rivista.

Problema 19: che buona la crostata! (da INVALSI 2008-2009 classe quinta)

Per fare una crostata per 8 persone utilizzo, tra gli altri ingredienti, 240 grammi di farina e 160 grammi di burro. Se impasto 360 grammi di farina e 240 grammi di burro, per quante persone sarà la crostata?

Le risposte proposte sono : 16; 12, 10; non si può dire.

E' un problema di proporzionalità abbastanza semplice che può essere affrontato con strategie diverse.

Si può escludere subito la risposta 16, che è il doppio di 8, perché gli ingredienti non vengono raddoppiati. Le altre tre rimangono ufficialmente in piedi.

Una **prima strategia** è quella della "riduzione all'unità", cioè calcolare la quantità degli ingredienti necessari per una persona. Si tratta di fare due divisioni per 8: 240 : 8 = 30 (grammi di farina) e 160 : 8 = 20 (grammi di burro). Poi ci sono altre due divisioni per determinare il numero delle persone: 360 : 30 = 12 (numero delle persone) e 240 : 20 = 12 (numero delle persone).

Una **seconda strategia** consiste nel confrontare le quantità degli ingredienti. 360 = 240 + 120 e 120 è la metà di 240. Analogamente 240 = 160 + 80 e 80 è la metà di 160.

Quindi il numero delle persone sarà 8 + 4 = 12 dato che 4 è la metà di 8.

Una **terza strategia** consiste nel calcolare l'aumento percentuale degli ingredienti: tutti vengono aumentati del 50%. Così deve essere anche delle persone.

Problema 20: imparare dalle lumache.

Come promesso nel capitolo quarto ritorniamo sul problema delle lumache.

Una lumaca vuol salire su una colonna alta 2 metri. Di giorno, quando c'è la luce, sale 1 metro, mentre di notte scende di mezzo metro. Quanti metri percorre per arrivare in cima? Naturalmente quando arriva in cima si ferma.

La risposta non è immediata e spesso ho sentito risposte errate anche da adulti.
Per trovare la soluzione è utile fare un disegno, cioè utilizzare il linguaggio iconico, delle salite e delle discese della lumaca. Si arriva presto alla soluzione.
Possiamo ragionare in questo modo (anche insieme ai ragazzi).
Durante il primo giorno (luce + tenebre) la lumaca parte da terra, sale di 1 metro e scende di mezzo metro. Quindi percorre 1 metro e mezzo. Durante il secondo giorno, la lumaca parte da una altezza di mezzo metro, sale di 1 metro (non arriva in cima) e scende di mezzo metro. Quindi percorre ancora 1 metro e mezzo. Siamo arrivati a 3 metri. Durante il terzo giorno, o meglio durante il periodo di luce del terzo giorno, la lumaca parte dall'altezza di 1 metro, sale di 1 metro e arriva in cima. Qui si ferma. Complessivamente ha percorso 4 metri. Questa è la soluzione del problema.
Possiamo fermarci qui (dipende anche dalla classe in cui si propone il problema), ma è più istruttivo continuare variando l'altezza della colonna e scoprire una regolarità.

Se la colonna fosse alta 3 metri, quanti metri percorre la lumaca per arrivare in cima? Si può incominciare da capo. Nel primo giorno la lumaca percorre 1 metro e mezzo ed arriva all'altezza di mezzo metro; nel secondo giorno percorre un altro metro e mezzo ed arriva all'altezza di 1 metro; nel terzo giorno percorre un altro metro e mezzo ed arriva all'altezza di 1 metro e mezzo; nel quarto giorno percorre ancora 1 metro e mezzo ed arriva all'altezza di 2 metri. Finora ha percorso 6 metri. Nel quinto giorno sale ancora 1 metro ed arriva in cima dove si ferma. Quindi sono 7 i metri percorsi.
Non è necessario, però, incominciare da capo. Ripetiamo il ragionamento di prima, partendo dall'altezza di 1 metro e mezzo dove è arrivata alla fine del terzo giorno. Per arrivare in cima la lumaca percorre altri 3 metri. Complessivamente, quindi, se la colonna è alta 3 metri, la lumaca percorre 7 metri.
Se la colonna fosse alta 4 metri, la lumaca percorrerebbe 10 metri.
Qui si delinea chiaramente la regolarità: per ogni metro di altezza in più della colonna, rispetto ai 2 metri iniziali, la lumaca percorre 3 metri in più. Questo fatto permette di prevedere quanti saranno i metri percorsi dalla lumaca se la colonna fosse alta, per esempio, 9 metri, oppure 11, oppure…
Nella scuola media e per gli adulti si può lanciare la sfida di una altezza di n metri. Qui si arriva a scoprire la formula aiutati dalla colonna dei "modi di scrivere" che vedete qui sotto.

altezza col.	metri percorsi	modi di scriverli		
2	4	4 = **2** + 2 + 0	4 **=** 2 **x 2** + 0;	4 = 3 x **2** - 2
3	7	7 = **3** + 3 + 1	7 = 2 x **3** + 1;	7 = 3 x **3** - 2
4	10	10 = **4** + 4 + 2	10 = 2 x **4** + 2;	10 = 3 x **4** - 2
…..	……	………………………………..		
n	?	? = **n** + n + (n-2)	? = 2 x **n** + (n – 2);	? = 3 x **n** - 2

Quale strada seguire per arrivare alla formula? L'unico punto fisso è che nella formula deve comparire l'altezza della colonna. Il resto dipende un po' dalla fantasia e dalle operazioni che si vogliono usare.

NOTA
Questo problema è stato pubblicato sul numero di marzo 2013 della rivista.

Problema 21
Tu conosci certamente le tabelline del pari (P) e del dispari (D) con l'addizione e la moltiplicazione. Prova a trovare il risultato delle divisioni: P : P; P : D; D : P; D : D. Puoi costruire la tabellina? Perché?

Il problema è abbastanza inconsueto e certamente poco esplorato nella scuola. Si tratta di dividere fra loro classi di numeri e non singole coppie di numeri sia pure ricorrendo ad esse per vedere come possono andare le cose.
Incominciamo con P : P. "Assaggiando", quasi a caso, qualche coppia di numeri pari è facile accorgersi che il risultato della divisione qualche volta è pari, mentre altre volte è dispari. Per esempio: 8 : 2 = 4; 12 : 4 = 3.
Quale sarà il risultato di P : P? Conviene ricordare il significato della divisione fra coppie di numeri. Che cosa vuol dire fare a : b? Vuol dire vedere se esiste un numero c che moltiplicato per b dà come risultato a, cioè, a : b = c → a = b x c.
Nel caso del problema c'è poco da scegliere: il risultato, se c'è, può essere P o D. Vediamo se esiste questo risultato. Può essere:
P : P = P → P = P x P. La cosa funziona.
P : P = D → P = P x D. La cosa funziona.
La conclusione è che la divisione P : P può avere come risultato sia P che D e non abbiamo possibilità di deciderlo a priori. Possiamo dire che il risultato è indeterminato. Questo fatto già ci dice che non possiamo costruire la tabella della divisione.
Consideriamo P : D. "Assaggiando" qualche coppia di numeri singoli si ottiene sempre un risultato pari: 6 : 3 = 2; 10 : 5 = 2; 12 : 3 = 4, ecc.

Troviamo la giustificazione considerando P : D. Il risultato può essere solo P. Infatti
P : D = P → P = D x P e la cosa funziona.
Non può essere P : D = D perché questo comporterebbe D x D = P che è assurdo.
Consideriamo D : P. "Assaggiando" qualche coppia di numeri singoli ci si accorge che non possiamo mai dividere un numeri dispari per un numero pari. Il fenomeno è abbastanza strano viste le esperienze nei casi precedenti, ma è di carattere generale come si vede considerando D : P.
Il risultato non può essere P perché altrimenti avremmo D = P x P, assurdo.
Il risultato non può essere D perché altrimenti avremmo D = P x D, assurdo.
Quindi nessun risultato nella situazione D : P.
Consideriamo, infine, D : D. "Assaggiando" un po' di coppie di numeri singoli, ci si accorge che, quando la divisione è possibile, il risultato è sempre dispari. La giustificazione la si vede considerando D : D. Il risultato può essere solo D dato che D x D = D. Non può essere P perché avremmo D = D x P, che è assurdo.

Problema 22: lo tsunami dei numeri decimali
Al ritorno da una gita mi sono accorto di avere nel borsellino solo una moneta da 1 centesimo di euro ed una da 2 centesimi. Pensando di essere un mago, per aumentare il mio misero capitale, mi conviene sommare il valore delle due monete, oppure moltiplicarlo o dividerlo?

Il titolo forse è eccessivo, ma il problema può servire per ridimensionare, almeno, certi stereotipi che nascono dalle attività con i numeri naturali. Gli stereotipi sono:

- Nella addizione il risultato è sempre maggiore dei due addendi. Vero tranne quando uno dei due addendi è 0.
- Nella moltiplicazione il risultato è sempre maggiore dei due fattori. Vero tranne quando uno dei due fattori è 1 oppure 0.
- Nella divisione il quoziente è sempre minore del dividendo. Vero tranne quando il divisore è 1 oppure quando il dividendo è 0.

Ritorniamo al nostro problema.
Conviene partire dalla constatazione esplicita, con gli alunni, che il "capitale" che possiedo nel borsellino è di 3 centesimi. Questo dovrebbe far scartare subito il ricorrere alla addizione per aumentare il mio capitale.
Gli alunni, e talvolta anche i loro insegnanti, propendono, forse in modo inconsapevole, per la moltiplicazione. Si tratta di passare all'azione scrivendo i valori delle monete sotto forma di frazioni o di numeri con virgola e di moltiplicarli. La delusione è grande quando si ottiene come risultato un decimillesimo.
Non resta che provare la divisione, anche se le speranze sono poche. Possiamo fare
1/100 : 2/100 oppure 2/100 : 1/100 o ricorrere ai numeri con virgola
0,01 : 0,02 oppure 0,02 : 0,01.
Con meraviglia si trova che nel primo caso si ottiene come risultato ½ (di euro) e nel secondo addirittura 2 (euro).
A questo punto, per avere una conferma, si può ricorrere alla calcolatrice.
Si può prendere spunto da questo problema per presentare ai bambini questa "riflessione" che prendo dal Quaderno 21:

“Bisogna che i bambini si rendano conto che nella moltiplicazione fra numeri decimali si verifica un vero “terremoto” per quanto riguarda la relazione fra risultato e fattori, anche quando non compare lo zero. Il risultato può essere:

- maggiore dei due fattori (quando ambedue sono maggiori di 1);
- uguale ad uno dei due fattori (quando uno dei due è uguale a 1);
- minore dei due fattori (quando ambedue sono minori di 1).

L’ultimo risultato sembrerà strano ai bambini data la loro precedente esperienza con i numeri naturali. Può essere significativo il ricorso alla calcolatrice per confermare i risultati ottenuti.”

Per quanto riguarda la divisione fra numeri decimali “La novità, è che si può ottenere un risultato che è maggiore sia del dividendo che del divisore: 0,1 : 0,2 = 0,5. Questo accade sempre quando il divisore è minore di 1. Anche qui può essere efficace il ricorso alla calcolatrice per confermare il risultato inaspettato.

Con queste due operazioni è interessante far il “gioco delle previsioni” sull’ordine di grandezza del risultato sia considerato in se stesso (ordine delle decine, delle unità, dei decimi, dei centesimi) sia in rapporto all’ordine di grandezza dei fattori o del dividendo e del divisore.”

Problema 23 (ispirato da INVALSI 2012 terza media)

Se a è un numero intero, che numero può essere 3 (a + 1)?

L’espressione “numero intero” fa pensare per lo meno ai numeri naturali. Di essi si può supporre che siano pari o dispari.
Se a è pari, allora l’espressione 3(a + 1) è un numero dispari perché sono dispari 3 ed a + 1 e il prodotto di due dispari è dispari.
Se a è dispari, allora a + 1 è pari e, quindi, il numero 3(a + 1) è pari perché prodotto di un dispari e di un pari.
L’espressione “numero intero” potrebbe far pensare anche ai numeri interi relativi e qualche ragazzo potrebbe distinguere il caso di +a e di –a. La distinzione è inutile per il nostro problema perché se a, pensato come numero naturale, è pari lo sono anche +a e – a; lo stesso succede se a, pensato come numero naturale, è dispari.

Problema 24: un concorso di matematica (da un concorso del Centro Pristem Eleusi, semifinali locali 2003))
Ad un concorso di matematica le ragazze erano il doppio dei maschi. Tutti i concorrenti erano molto bravi e ciascuno di essi ha ottenuto 8, 9 o 10 punti. Tutti insieme hanno totalizzato 156 punti. Quanti ragazzi maschi hanno partecipato al concorso?

Ad una prima lettura il problema dà l’impressione di essere un po’ scombinato perché non si conosce il totale dei partecipanti e quanti punti ciascuno di essi abbia guadagnato. Eppure gli scarni dati offerti sono sufficienti per risolvere il problema.

Sappiamo anzitutto che le femmine sono il doppio dei maschi e questo significa che il numero totale dei partecipanti deve essere un multiplo di 3.
Sappiamo, inoltre, che ciascun partecipante ha guadagnato al massimo 10 punti.
Infine sappiamo che il totale dei punti guadagnati è 156.
Procediamo per congetture e verifiche. Teniamo fissa la congettura che ciascun partecipante abbia guadagnato il massimo dei punti, cioè 10.

- Supponiamo che i partecipanti siano 3 = 1 + 2. Si arriva ad un totale di 30 punti. Troppo poco.
- Supponiamo che i partecipanti siano 6 = 2 + 4. Si arriva ad un totale di 60 punti. Troppo poco.
- Supponiamo che i partecipanti siano 9 = 3 + 6. Si arriva ad un totale di 90 punti. Troppo poco.
- Supponiamo che i partecipanti siano 12 = 4 + 8. Si arriva ad un totale di 120 punti. Troppo poco.
- Supponiamo che i partecipanti siano 15 = 5 + 10. Si arriva ad un totale di 150 punti. Troppo poco.
- Supponiamo che i partecipanti siano 18 = 6 + 12. Si arriva ad un totale di 180 punti. Abbiamo superato il punteggio offerto dal problema.

La risposta alla domanda del problema è: 6.

Problema 25: le liane di Tarzan (da una gara del Centro Pristem Eleusi, finale internazionale 2000)

Nella foresta Tarzan si sposta in linea retta di liana in liana. Ci sono due tipi di liane: quelle corte che permettono di fare dei salti di 4 m e quelle lunghe che permettono di fare salti di 7 m. Tarzan vuole arrivare su un masso situato a 41 metri dal bordo di uno stagno. Quante liane deve utilizzare?

La prima osservazione da fare è che Tarzan deve utilizzare tutti e due i tipi di liane. Non può utilizzare solo quelle corte perché 41 non è multiplo di 4 e neppure solo quelle lunghe perché 41 non è multiplo di 7. Bisogna trovare quante di un tipo e quante dell'altro per trovare il totale. E' giocoforza procedere per congetture e verifiche.

Utilizzando 1 solo liana corta, Tarzan fa 4 metri; gliene restano 37 che non può percorrere con le liane lunghe perché 37 non è multiplo di 7.

Utilizzando 2 liane corte, Tarzan fa 8 metri; gliene restano 33 che non può percorrere con le liane lunghe perché 33 non è multiplo di 7.

Utilizzando 3 liane corte, Tarzan fa 12 metri; gliene restano 29 che non può percorrere con le liane lunghe perché 29 non è multiplo di 7.

Utilizzando 4 liane corte, Tarzan fa 16 metri; gliene restano 25 che non può percorrere con le liane lunghe perché 25 non è multiplo di 7.

Utilizzando 5 liane corte, Tarzan fa 20 metri; gliene restano 21 che può percorrere con 3 liane lunghe.

In totale Tarzan deve utilizzare 8 liane.

Se si parte con il considerare le liane lunghe si fanno solo tre passaggi.

Tutto diventa più veloce traducendo il problema nella equazione: $4x + 7y = 41$ dove x è il numero delle liane corte ed y quello delle liane lunghe. Le due variabili sono comprese fra questi paletti: $0 < x < 9$ e $0 < y < 5$. Inoltre y deve essere dispari e quindi può assumere solo i valori 1 o 3. Non può essere $y = 1$ perché 34 (= 41 – 7) non è multiplo di 4. Quindi si ha $y = 3$. Ne segue $x = 5$. Quindi la soluzione è data dalla coppia (5, 3).

Problema 26: conoscere una regione.

La superficie della regione Veneto è di 18 364 kmq. La parte pianeggiante si estende per 10283 kmq; il 29% è occupato dalle montagne e la parte restante dalle colline. Calcola, in kilometri quadrati, la superficie delle colline e delle montagne e in percentuale quella della pianura e delle colline.

Questo sembra un problema da mal di testa per la quantità dei conti richiesti, ma penso che sia ugualmente abbordabile senza particolari traumi.

La parte più facile è calcolare la superficie delle montagne, che è il 29% della superficie totale. Potrebbe essere interessante, anche se non richiesto dal problema, chiedere agli alunni di fare una stima della superficie delle montagne, magari pensando al 30% per facilitare i conti. Fatti i conti si trova che la superficie delle montagne è di 5325 kmq. Per differenza si trova la superficie delle colline che è di 2756 kmq. Per una conferma si può ricorrere alla calcolatrice.

Più difficile è calcolare le percentuali anche se il metodo è quello standard. Qui è bene usare la calcolatrice e fare gli arrotondamenti. Si trova che la pianura occupa il 56% e le colline il 15%. Quest’ultimo risultato può essere ottenuto anche per differenza.

Il problema si presta per fare il discorso sulle approssimazioni decimali e sugli arrotondamenti.

CAPITOLO 8
PROBLEMI DI GEOMETRIA

Problemi di geometria si trovano in

1 - Quaderno 17. Sono problemi per la prima e seconda elementare. I problemi proposti sono tutti commentati.

2 - Quaderno 18. Sono problemi per la terza, quarta e quinta elementare. I problemi proposti sono tutti commentati.

3 - Sussidiario Grandangolo (3 – 4 – 5). Diversi dei problemi proposti sono commentati nella Guida.

4 - Sussidiario Base (3 – 4 – 5). Diversi dei problemi proposti sono commentati nella Guida.

5 - Sussidiario Ulisse. Viaggio nei saperi (3 – 4 – 5). Diversi dei problemi proposti sono commentati nella Guida.

6 - Articolo “Matematica per la seconda elementare. Geometria” di M. Ferrari, IMSI, marzo 2008.

7 - C. Colombo Bozzolo, A. Costa e C. Alberti (a cura di) (2005), Nel mondo della matematica, Volume 1, Situazioni problematiche per alunni dai 6 agli 8 anni, Erickson.

8 - C. Colombo Bozzolo, A. Costa e C. Alberti (a cura di) (2005), Nel mondo della matematica, Volume 2, Situazioni problematiche per alunni dai 9 agli 11 anni, Erickson.

9 - Alcuni problemi di geometria della Prova Nazionale INVALSI 2011-2012 sono illustrati nel numero di marzo 2013.

PROBLEMI

Problema 1: strane parole

Ci sono numeri che possono essere letti indifferentemente da sinistra a destra, come si fa di solito, e da destra a sinistra. Uno di questi numeri, per esempio, è 121. Numeri come questi sono chiamati palindromi. Sapresti trovare qualche parola che si può leggere ugualmente da sinistra a destra e da destra a sinistra? C’entra qualcosa la simmetria?

Questo problema potrebbe essere preceduto dalla ricerca delle lettere dell’alfabeto, scritte in stampatello maiuscolo, che presentano un asse di simmetria. Se si è parlato un po’ di simmetria (assiale) con attività di piegatura e con l’uso dello specchio, il problema può essere assegnato, come è stato fatto, in seconda elementare. La ricerca sulle lettere dell’alfabeto e la domanda finale del problema dovrebbero facilitare la scoperta di alcune di queste parole. Sono di questo tipo parole come: AVA, OTTO, OIO, AMA, ATTA, OMO, AIA.

Queste parole sono composte con lettere che hanno tutte un asse di simmetria “verticale”. E’ proprio questo asse che scambia la destra con la sinistra. E’ quello che fa lo specchio nello spazio.

Si trovano interessanti attività e schede di lavoro sulla simmetria assiale nell’articolo
A. Neri, La simmetria nel primo ciclo: dall’esperienza alle prime intuizioni, *Quaderno Didattico N. 13-14* (esaurito, ma disponibile in fotocopia).

Attività sviluppate dai ragazzi in seconda elementare con macchie, disegni e ritagli adeguatamente descritte dai ragazzi stessi si trovano in
M. Ferrari - M. Maggi, Attività di geometria in classe seconda. La simmetria assiale, IMSI vol. 14 N. 1 gennaio 1991 scaricabile direttamente dal sito del Centro.

Nella scuola elementare bisogna studiare anche la geometria dello spazio, anzi questa dovrebbe costituire il primo approccio alla geometria se non altro per il fatto che viviamo in un mondo a tre dimensioni e non a due. Dalle figure solide, perimetrando le facce o osservandone le impronte si fanno nascere le prime figure piane che possono essere dominate completamente. L’ideale sarebbe di continuare lo studio della geometria intrecciando continuamente i concetti e le attività dello spazio e del piano. Questo, però, va al di la di questo corso di aggiornamento.

Tra le figure che dobbiamo studiare ci sono certamente i prismi e le piramidi. Anche accontentandoci di nozioni intuitive, ma conoscendo che nei poliedri ci devono essere vertici, spigoli e facce possiamo affrontare alcuni problemi.

Problema 2: Mario e il prisma

Mario sta giocherellando con un modello in legno di un prisma. Ad un tratto si fa serio e dice a Luca: " Luca: per conoscere tutti i numeri di un prisma basta conoscere una base”. Sei d'accordo anche tu o pensi che Mario stia bleffando ?"

I "numeri" del prisma sono quelli che riguardano i vertici, gli spigoli e le facce e che entrano nella formula di Eulero.

Ogni prisma ha due facce che sono opposte, parallele e congruenti. Queste sono le basi.

Conoscere una base significa saper quanti vertici e quanti lati ha.

Osservando il modello di un prisma ci si accorge subito che

- II numero dei suoi vertici è doppio del numero dei vertici di una base.

  I vertici di un prisma, infatti, si distribuiscono, in numero uguale, sulle due basi. Il numero dei vertici, quindi, è sempre pari.

- II numero delle facce di un prisma è uguale al numero dei lati di una base (le facce laterali) più 2 (le due basi).

  Questo numero è pari se lo è il numero dei lati di una base, altrimenti è dispari.

- ll numero degli spigoli di un prisma è triplo del numero dei lati di una base: spigoli di una base più spigoli dell'altra base, più spigoli che uniscono due vertici corrispondenti delle due basi. Questo numero è pari se tale è il numero dei lati di una base, dispari in caso contrario.

In quale classe assegnare questo problema? Dipende dal percorso didattico che in classe è stato sviluppato. Io penso che l'attività potrebbe essere iniziata in seconda maneggiando il modello di un prefissato prisma. Nelle classi successive si arricchiscono le esperienze con altri tipi di prismi "leggendo" i numeri sulle figure del sussidiario. Nella scuola media, ma, forse, anche in quinta, si può arrivare anche al caso generale: "La base di un prisma ha n vertici. Scrivi tutti i suoi numeri".

Vertici: 2n; facce: n + 2; spigoli: 3n.

Collegati a problemi di questo tipo ci possono essere problemi come il seguente.

Problema 3: l'errore di Arnaldo.

Arnaldo è un alunno molto riflessivo e preferisce fare ragionamenti invece che manipolare figure solide. Sapendo che in ogni vertice di un prisma a base triangolare si incontrano 3 spigoli, afferma che essendo 6 i vertici ne deriva che gli spigoli sono 3 x 6 = 18. Non è che Arnaldo ha commesso qualche errore?

E' vero che in ogni vertice si incontrano 3 spigoli e che i vertici sono 6. E' vero anche che il conto di Arnaldo è esatto. Eppure controllando un prisma triangolare, come la scatola del Toblerone, o una sua immagine, si contano 9 spigoli. Dove sta l'errore di Arnaldo? Egli non ha tenuto conto del fatto che ogni spigolo collega 2 vertici. Arnaldo ha contato ogni spigolo due volte. Facendo
18 : 2 = 9 si trova il numero esatto di spigoli.

Problema 4: l'alunno detective

Un alunno di scuola elementare vede in un armadio della classe tre sfoglie di creta. Su una c'è l'impronta di un rettangolo, su un'altra c'è l'impronta di un quadrato e sulla terza l'impronta di un triangolo. Incuriosito vuole scoprire quali solidi hanno lasciato queste impronte. Vuoi fare anche tu il detective?

Solitamente quando si parla di impronte di un solido si pensa all'impronta di una base. In questo caso le soluzioni non sono molte. Il problema, però, non lo richiede e il numero delle soluzioni aumenta.

- Una impronta rettangolare può essere lasciata da un parallelepipedo, da un cubo (se accettiamo che il quadrato sia un particolare rettangolo), da un prisma retto qualunque (le sue facce laterali sono rettangoli), da una piramide a base rettangolare o quadrata.

- Una impronta quadrata può essere lasciata da un cubo, da un parallelepipedo a base quadrata, da un prisma retto a base qualunque con facce laterali quadrate, da una piramide a base quadrata.

- Una impronta triangolare può essere lasciata da un prisma a base triangolare, da una piramide a base triangolare e da una piramide a base qualunque (impronta di una faccia laterale che è sempre triangolare).

Problema 5: **i conti di Pierino**

Pierino è un maghetto della matematica. Un giorno, tutto convinto, dice alla sua maestra: maestra sono riuscito a pensare a un poliedro che ha 7 vertici, 7 facce e 14 spigoli. Dobbiamo credergli o Pierino si è sbagliato?

Uno studente di scuola media direbbe subito che Pierino si è sbagliato perché il suo poliedro non rispetta la relazione di Eulero: $v + f = s + 2$ che vale per tutti i poliedri convessi e dove: v è il numero dei vertici, f il numero delle facce ed s il numero degli spigoli.

Se non si conosce la formula di Eulero possiamo ragionare.

Il numero dei vertici è dispari e quindi il poliedro non può essere un prisma che ha sempre un numero pari di vertici. Essendo alle elementari, sarà una piramide. Dei 7 vertici, 1 è fuori dalla base e gli altri 6 appartengono alla base. La piramide, quindi, è a base esagonale. Questa piramide ha effettivamente 7 facce, quella esagonale e 6 triangolari, una per ogni lato della base. Il numero degli spigoli in una piramide è sempre pari e sono il doppio di quelli della base. Quindi sono 12 e non 14. Del resto, basta contarli: sono 6 (quelli della base) + 6 (quelli che uniscono il vertice con i vertici della base). Pierino, quindi, si è sbagliato.

Problema 6: dagli spigoli al…resto.

Si sa che un poliedro ha 12 spigoli. Quanti vertici e quante facce può avere?

La conoscenza del parallelepipedo, e del cubo come suo caso particolare, fornisce una prima risposta. I parallelepipedi hanno 12 spigoli, 8 vertici e 6 facce. Il problema, ora, è di sapere se questa è l'unica risposta. Si può iniziare una ricerca di tipo induttivo.

Il numero minime di facce di un poliedro è 4. E' il caso della piramide a base triangolare o tetraedro. I suoi spigoli, però, sono 6, cioè il doppio del numero degli spigoli della base. [Questa proprietà è generale: in una piramide il numero degli spigoli è il doppio del numero degli spigoli della base.] Conoscendo questa proprietà si può pensare subito alla piramide a base esagonale. Effettivamente i suoi spigoli sono 12 (è il dato del problema). I suoi vertici sono 7 e le sua facce sono 7. Questa è la seconda soluzione. Inutile cercarne altre nel mondo delle piramidi e nella famiglia dei prismi.

Le due soluzioni trovate si accordano perfettamente con la formula di Eulero: $v + f = s + 2$.

Problema 7: Tra rettangolo e quadrato.

"A me piacerebbe dividere un rettangolo in due parti congruenti e ottenere due quadrati congruenti. Come devono essere i lati del rettangolo?"

E' bene lasciare ai bambini la libertà di disegnarsi il rettangolo che vogliono, magari su carta quadrettata per facilitare la ricerca della soluzione. Se il problema non è stato letto con attenzione potrebbe sfuggire l'idea, suggerita dalla domanda, che tutto si gioca sulla lunghezza dei lati. Il problema ha soluzione solo se il lato lungo del rettangolo è doppio del lato corto.

Una strategia, nota fin dall'antichità e chiamata "analisi", consiste nel supporre risolto il problema e nel ricercare le condizioni che lo rendono risolubile.

Supponiamo, quindi, di aver risolto il problema, cioè di avere due quadrati congruenti. Se li uniamo per un lato otteniamo un rettangolo che ha un lato congruente a quello dei due quadrati e l'altro che è il doppio. Questa è la condizione che rende risolubile il problema: il rettangolo di partenza deve avere un lato doppio dell'altro.

Difficilmente i bambini seguiranno questa strategia; bisognerà, quindi, illustrarla nella discussione finale. I bambini, probabilmente, seguiranno una strategia diretta, di tentativi, con misurazioni.

Problema 8: il quadrato di Platone

"Disegna un quadrato qualunque su carta quadrettata. Costruisci, con gli strumenti che vuoi, un quadrato di area doppia."

Il segreto del problema sta nel consiglio "costruisci con gli strumenti che vuoi" che dovrebbe sconsigliare i bambini dal tentativo di disegnare il quadrato di area doppia e avviarli verso altri tipi di attività come taglia e incolla. Può darsi che qualche bambino disegni un quadrato con i lati di lunghezza doppia, ma non dovrebbe essere difficile accorgersi che l'area non è doppia , ma quadrupla.

Un alunno di scuola media, se già l'ha studiato, potrebbe ricorrere al teorema di Pitagora e costruire, con riga e compasso, un quadrato con il lato lungo come la diagonale del primo quadrato.

Senza il teorema di Pitagora come si può procedere?

Il punto di arrivo è un quadrato di area doppia del primo. Il primo passo è quello di disegnare due quadrati congruenti al primo e ritagliarli. Se li unisco per un lato ottengo sì una figura di area doppia, ma non è un quadrato.

L'idea intelligente è, allora, di ritagliare i due quadrati lungo una diagonale ottenendo 4 triangoli rettangoli. Poi si tratta di unirli in modo da ottenere un quadrato. Basta, per questo, mettere al centro della figura i 4 angoli retti dei 4 triangoli rettangoli.

Il problema non è semplice e potrebbe essere risolto collettivamente.

Problema 9: si può o no?

Di un quadrato so che una sua diagonale è lunga 15 centimetri. Posso calcolare la misura della sua area?

Spesso la prima reazione è negativa perché, si pensa, per calcolare la misura dell'area di un quadrato devo conoscere la misura della lunghezza di una lato. Il problema mi offre solo la lunghezza di una diagonale. La reazione è comprensibile se alla scuola si è presentata sempre e solo la formula dell'area del quadrato legata al lato.

Nella parola "quadrato" sono contenute due informazioni:

- Il quadrato ha le diagonali uguali
- Il quadrato ha le diagonali perpendicolari.

A questo punto dovrebbe entrare in azione la formula dell'area dei quadrilateri che hanno le diagonali perpendicolari e che, di solito, viene presentata solo per il rombo.

Il problema, quindi, è risolubile e la misura dell'area si trova con un semplice calcolo.

Problema 10: per due punti quante circonferenze complanari passano?

Disegna su un foglio due punti A e B e, se vuoi, anche il segmento che li unisce. Secondo te quante sono le circonferenze che passano contemporaneamente per i due punti e che stanno tutte sullo stesso piano (quello del foglio)? Cerca di usare poco la matita e molto la testa.

La condizione che le circonferenze devono stare tutte nello stesso piano, va sottolineata perché è forte la tentazione di collocarsi nello spazio. Il suggerimento di usare poco la matita serve per non mettersi a disegnare circonferenze che passino per i due punti.

Che una circonferenza esista è fuori di dubbio: è la circonferenza che ha come centro il punto medio M del segmento AB ed è facile disegnarla. Il segmento AB è pensato come diametro della circonferenza. Ne esistono altre? Si potrebbe pensare di si. Dovrebbero essere circonferenze per le quali il segmento AB non è un diametro, ma una corda. Mettersi a disegnarle è un pò arduo perché non si sa dove collocare il centro di queste circonferenze. Non è la strategia migliore.

La strategia migliore consiste nel far leva sul punto medio M di AB. Esso è equidistante dagli estremi A e B. Tutti i punti equidistanti da A e da B sono centri di circonferenze che passano da A e da B. Dove si trovano questi punti? Sull'asse del segmento AB. Tutti i punti dell'asse del segmento AB sono centri di circonferenze che passano da A e da B. Queste circonferenze, quindi, sono infinite. Certo per risolvere il problema bisogna conoscere che cosa è l'asse di un segmento (è la perpendicolare nel punto medio) e qual è la caratteristica dei suoi punti (essere equidistanti dagli estremi del segmento).

Forse nella formulazione del problema si può aggiungere l'informazione di disegnare l' asse del segmento AB..

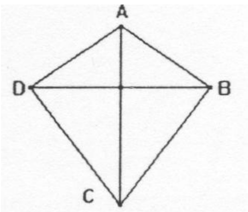
Problema 11: quadrilateri un po’ “speciali”

Tu sai che il quadrato ed il rombo hanno le diagonali perpendicolari. Secondo te sono gli unici quadrilateri con le diagonali perpendicolari o ce ne sono altri? Se ci sono disegnane qualcuno e spiega la tua strategia per trovarli.

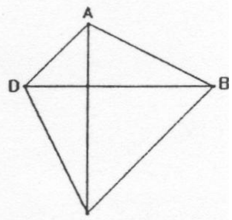
Diversi anni fa ho dato questo problema, senza il ricordo del quadrato e del rombo, in una lezione improvvisata in una quinta elementare e le risposte sono state incoraggianti, perché i bambini hanno disegnato anche altri quadrilateri oltre al quadrato ed al rombo.

In questo problema il punto fisso è la perpendicolarità delle diagonali e ci sono proprietà variabili come descritto qui sotto. La strategia consiste nel disegnare prima le diagonali e poi il quadrilatero.

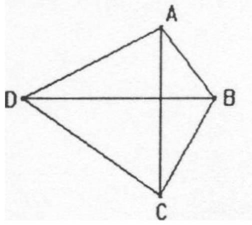
- ❑ Diagonali uguali:
  - Si tagliano nel rispettivo punto medio: quadrato



  - Una sola è tagliata nel punto medio: deltoide con asse di simmetria.

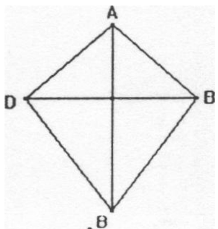


  - Non si tagliano nel punto medio, ma in parti rispettivamente uguali: trapezio isoscele.

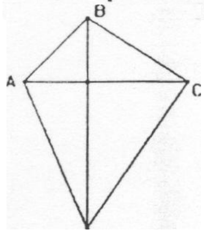


  - Non si tagliano nel punto medio e neppure in parti uguali: deltoide senza assi di simmetria.

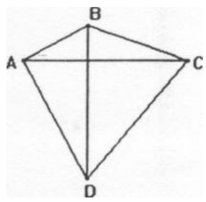
- ❑ Diagonali diverse
  - Si tagliano nel rispettivo punto medio: rombo.



  - Una sola è tagliata nel punto medio: deltoide con un asse simmetria.



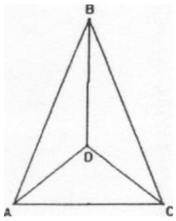
  - Non si tagliano nel punto medio, ma due parti sono uguali: deltoide senza asse di simmetria



  - Non si tagliano nel punto medio e i 4 “pezzi” sono diversi: deltoide senza assi di simmetria

Si può estendere la ricerca anche ai quadrilateri concavi:

- Diagonali uguali
    - Il prolungamento di una taglia l'altra nel punto medio: coda rondine con asse di simmetria.
    - Il prolungamento di una non taglia l'altra nel punto medio: coda di rondine senza simmetria
    - Diagonali diverse: si ripetono le due situazioni precedenti.



L’interesse dei quadrilateri con le diagonali perpendicolari sta nel fatto che la loro area si esprime sempre con la stessa formula, quella che di solito viene presentata solo per il rombo.

Problema 12: rette, semirette, segmenti.

___________A___________B____C_____________D___________________________r

Sulla retta r sono stati disegnati quattro punti. Quanti segmenti e quante semirette vedi?

Il problema sembra banale, ma le risposte, anche di insegnanti, sono spesso errate.

II guaio è che nella prassi didattica siamo troppo spesso abituati a considerare solo semirette disgiunte, cioè senza parti in comune, e anche solo segmenti disgiunti. Per questo sovente le risposte che ho sentito sono: 2 semirette (quelle di origine A) e 1 solo segmento (quello di estremi A e D).

Basterebbe ricordare che ogni coppia di punti determina un segmento e ogni punto è origine di due semirette per dare la risposta esatta:

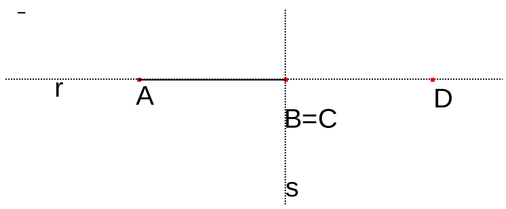
- 6 segmenti AB, AC, AD, BC, BD, CD.
- 8 semirette.

Problema 13: il destino di due segmenti congruenti

La figura formata da due segmenti congruenti quanti assi di simmetria può avere?

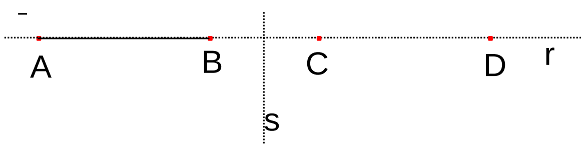
Una prima difficoltà nasce dal fatto che spesso si è convinti che due segmenti non possano formare una figura perché una figura geometrica è sempre pensata chiusa. Bisogna, quindi, sottolineare che una figura geometrica è un qualunque insieme non vuoto di punti. Superato questo ostacolo bisogna procedere ad esaminare le diverse possibili figure, le diverse possibili configurazioni.

- I due segmenti AB e CD stanno sulla stessa retta e sono consecutivi.



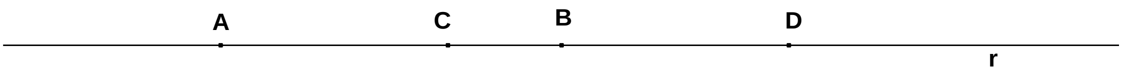
Due assi: r ed s perpendicolare in B = C. Mentre può essere facile scoprire l’asse s di simmetria è più difficile pensare che anche r, la retta sulla quale stanno i due segmenti, sia un asse di simmetria per la figura. Nella simmetria rispetto ad r la figura formata dai due segmenti si trasforma in se stessa, anzi ogni punto si trasforma in se stesso. Quindi anche r è un asse di simmetria.

- I due segmenti stanno sulla stessa retta e sono disgiunti:



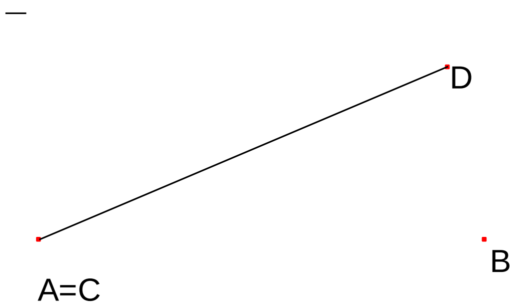
Due assi: r ed s perpendicolare nel punto medio del segmento BC.

- I due segmenti stanno sulla stessa retta, ma non sono disgiunti.



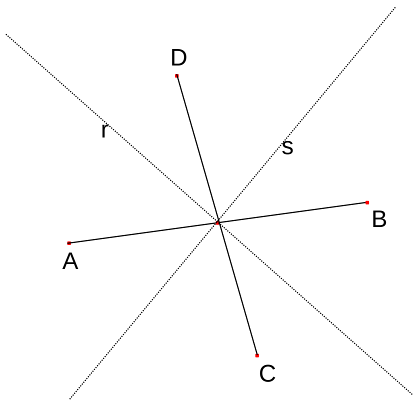
Ancora **due assi** r e s. L’asse s è sempre la perpendicolare nel punto medio di CB.

- I due segmenti non stanno sulla stessa retta, ma hanno un estremo in comune:



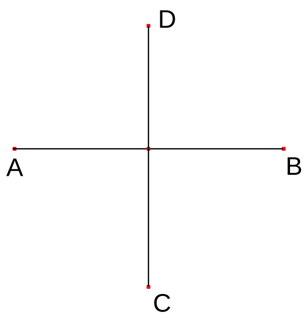
Un asse: la bisettrice dell'angolo.

- I due segmenti si tagliano nei punti medi, ma non sono perpendicolari.



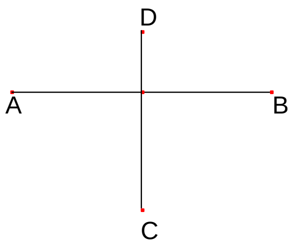
Due assi: le due bisettrici r e s.

- I due segmenti si tagliano nel punto medio e sono perpendicolari



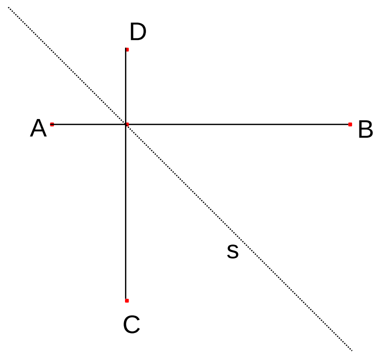
Quattro assi: le rette AB e BD e le due bisettrici.

- I due segmenti sono perpendicolari, ma nel punto medio di uno solo



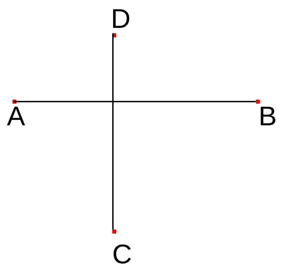
Un solo asse: la retta CD.

- I due segmenti sono perpendicolari, non si tagliano nel punto medio, ma in parti rispettivamente uguali

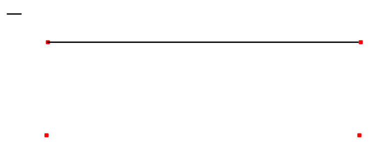


Un asse di simmetria: la bisettrice s.

- Negli altri casi di perpendicolarità: nessun asse.

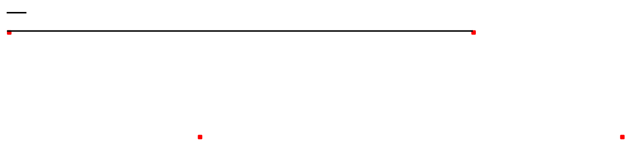


- I due segmenti sono paralleli e formano i lati opposti di un rettangolo:



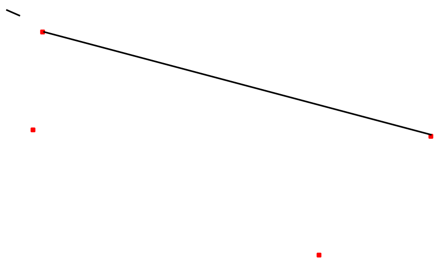
Due assi di simmetria: quelli del rettangolo.

- I due segmenti sono paralleli e formano i lati opposti di un parallelogramma.



Nessun asse di simmetria.

- I due segmenti non sono paralleli, non sono incidenti



Nessun asse di simmetria.

Problema ricco, un po' noioso, da studiare a tappe.

Problema 14: dalla misura del lato a quella dell’area

Quello che vedi disegnato è un esagono regolare ABCDEF.

Tu sai che un suo lato misura 6 in centimetri.

Puoi calcolare la misura della sua area? Perché?

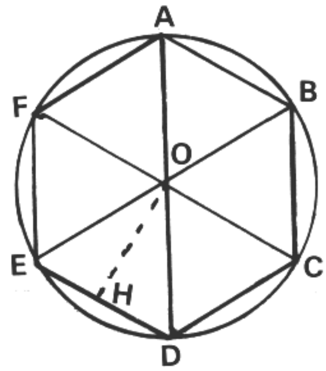


Fig.11

A prima vista sembrerebbe di no: le informazioni sembrano insufficienti. Certo possiamo calcolare il perimetro dell’esagono regolare. La figura suggerisce con evidenza che la misura dell’area dell’esagono è 6 volte la misura dell’area di uno dei triangoli, per esempio EOD. Solo che bisogna conoscere la misura dell’altezza OH, cioè dell’apotema. Qui bisogna far intervenire i “numeri fissi” che esprimono per ogni poligono regolare il rapporto costante tra misura dell’apotema e misura del lato. Moltiplicando la misura del lato per il numero fisso dell’esagono si ottiene la misura dell’apotema, cioè dell’altezza del triangolo considerato. Quindi conoscendo la misura del lato si può calcolare la misura dell’area dell’esagono.

Nella scuola media, sapendo che i triangoli sono equilateri, si può calcolare OH ricorrendo al teorema di Pitagora.

Problema 15: che bel trapezio

Prova a disegnare con precisione un trapezio formato da tre triangoli equilateri. Il lato di un triangolo è lungo 15 centimetri. Quanto vale il perimetro del trapezio?

La parte più difficile del problema è, forse, il disegno del trapezio. Il fatto che si nomini prima il trapezio può spingere qualche alunno a disegnare prima il trapezio e poi a ricavare al suo interno i tre triangoli equilateri. E' la strada più difficile. La si può percorrere a patto che la base maggiore del trapezio sia il doppio di quella minore. La strategia più sicura è di ottenere il trapezio accostando tre triangoli equilateri uguali. Il calcolo del perimetro è immediato.

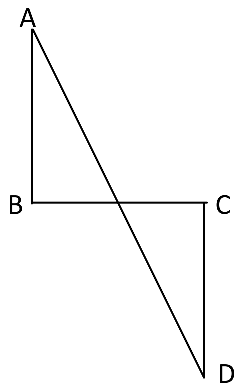
Alla scuola media, applicando il teorema di Pitagora si può calcolare anche l'area del trapezio.

Problema 16: il quadrilatero di Pierino

Pierino, il solito geniettto della classe, annuncia trionfante: ho disegnato un quadrilatero ABCD con 3 lati uguali e due angoli retti. La maestra si mostra perplessa, i compagni dicono che Pierino ha bleffato. Tu cosa ne pensi?

All'inizio si lasciano liberi gli alunni di fare i tentativi per disegnare il quadrilatero di Pierino. Non dovrebbe essere disegnato un rombo il quale ha si tre lati uguali, ma non due angoli retti: Anche il rettangolo non dovrebbe essere accettato perché non ha tre lati uguali. Un trapezio rettangolo ha due angoli retti, ma con tre lati uguali diventa un quadrato. Il candidato ad essere il quadrilatero di Pierino è il quadrato che ha due angoli retti e certamente tre lati uguali. Una soluzione di questo tipo sarebbe, però, troppo banale. Allora si può domandare a Pierino se tre lati uguali vuol dire esattamente tre o almeno tre. Così pure per due angoli retti intende esattamente due o almeno due? Pierino risponde che tre vuol dire tre, non di più e non di meno, e due vuol dire due, non di più e non di meno. Esisterà, allora, il quadrilatero di Pierino? Proviamo.

Tracciamo il lato AB, lungo per esempio 3 centimetri, in senso "verticale" dall'alto in basso; da B facciamo partire, per esempio verso destra, il lato BC perpendicolare ad AB e della stessa lunghezza; da C facciamo partire, verso il basso, il lato CD perpendicolare a BC e della stessa lunghezza. Infine, uniamo D con A. Il lato DA taglia il lato BC perché rispetto alla retta BC i punti A e D si trovano in semipiani opposti. Otteniamo un quadrilatero concavo e intrecciato che ha le caratteristiche descritte da Pierino.



Le nostre difficoltà a risolvere il problema derivano dalla nostra radicata abitudine a considerare quasi esclusivamente quadrilateri convessi oppure, in misura molto minore, quadrilateri concavi ma semplici.

Problema 17: scopriamo la regolarità delle diagonali

Tu sai certamente che cosa è una diagonale di un poligono. Ti va di scoprire il numero delle diagonali di alcuni poligoni e della regolarità con la quale aumentano?

Una prima e interessante attività consiste nel disegnare alcuni poligoni, triangolo, quadrilatero, pentagono, esagono con le loro diagonali. Ci vuole un po' di attenzione per non perdere qualche diagonale per strada. Poi si passa al conteggio delle diagonali ed alla costruzione di una tabella come quella riportata.

FIGURA	**N. DEI LATI**	**N. DIAGONALI**
TRIANGOLO	3	0
QUADRATO	4	2
PENTAGONO	5	5
ESAGONO	6	9
ETTAGONO	7	14
OTTAGONO	8	20
ENNAGONO	9	27
DECAGONO	10	35
UNDECAGONO	11	44
DODECAGONO	12	54

Fino all'esagono o, forse, fino all'ottagono, la tabella può essere costruita dai singoli bambini. La costruzione del seguito può essere fatta collettivamente, anche perché i nomi dei poligoni non sono molto familiari.

Sulla tabella i bambini non hanno avuto difficoltà a "leggere" come aumenta il numero delle diagonali all'aumentare del numero dei lati del poligono. Dopo il primo scatto di 2, nel passare dal triangolo al quadrato, la sequenza dell'aumento del numero delle diagonali è +3, +4, +5, ecc.

Sulla tabella si possono fare anche altre osservazioni.

- Il pentagono è un poligono di "confine" perché separa i poligoni nei quali il numero dei lati è maggiore del numero delle diagonali da quelli per i quali si verifica la situazione opposta.

- A partire dal pentagono, nel quale c'è parità fra numero dei lati e delle diagonali, per ogni aumento di 2 del numero dei lati, il numero delle diagonali diventa doppio (ettagono), triplo (nonagono), quadruplo (undecagono).

- Se si vuole andare un po' più nel fine, e nel riposto, si può anche osservare che il rapporto fra numero delle diagonali e numero dei lati nel pentagono è 1 e nell'ettagono è 2. La media aritmetica di questi due rapporti è 1,5. L'esagono ha 6 lati e 6 è la media aritmetica fra 5 e 7. Ebbene il rapporto fra numero delle diagonali e numero dei lati nell'esagono è 1,5.

  Procedendo si trova che questo rapporto, nell'ottagono, è 2,5; nel decagono è 3,5; nel dodecagono è 4,5.

Come si vede si tratta di regolarità non essenziali, forse, alla comprensione dei concetti matematici, ma la cui scoperta rivela l'armonia profonda della matematica.

Alla tabella vista, può essere affiancata un'altra tabella come quella riportata qui, che mette in risalto il numero di diagonali "nuove" che partono dai singoli vertici e, quindi, la strategia da seguire per non commettere errori

numero vertici	numero delle diagonali "nuove" per ogni vertice										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N
3	0	0	0									
4	1	1	0	0								
5	2	2	1	0	0							
6	3	3	2	1	0	0						
7	4	4	3	2	1	0	0					
8	5	5	4	3	2	1	0	0				
9	6	6	5	4	3	2	1	0	0			
10	7	7	6	5	4	3	2	1	0	0		
11	8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	
12	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0

La strategia consiste nel partire da un vertice qualunque tracciando tutte le possibili diagonali.

Se il poligono ha n vertici, dal primo scelto partono (n-3) diagonali. Infatti da questo vertice non partono diagonali né per lo stesso vertice, né per il precedente né per il consecutivo.

Si sceglie, poi, il vertice consecutivo. Anche da esso partono altre (n-3) diagonali. Esse sono tutte "nuove" perché questo vertice non è stato raggiunto da nessuna diagonale.

Proseguendo il numero delle diagonali nuove diminuisce ogni volta di uno fino ad arrivare a zero.

Alla scuola media non dovrebbe essere difficile arrivare alla formula del numero delle diagonali di un poligono di n vertici. Certamente nella formula deve entrare il numero n dei vertici perché il numero delle diagonali, come abbiamo visto nella prima tabella, varia con il variare del numero dei vertici. Da ogni vertice, inoltre, partono (n – 3) diagonali. Quindi il numero delle diagonali è, al massimo, n (n-3). Però ogni diagonale viene contata due volte perché, per esempio, la diagonale che va dal vertice A al vertice C è la stessa che va dal vertice C al vertice A. Quindi il numero va diviso per 2. Ecco, allora, la formula:

$$\mathbf{N = \frac{n\,(n-3)}{2}}$$

Problema 18: trovare l’asse di simmetria

Qui sotto vedi due coppie di punti simmetrici: A e A’ e B e B’. Forse ti domanderai rispetto a che cosa sono simmetrici. Giusto! Questo è il problema che devi risolvere: con una riga non graduata, con una cartolina, con la quale si possono solo tracciare solo rette e non fare misure, trovare l’asse di simmetria.

A

B

B’

A’

Prima mossa: tracciare la **retta** AB

Seconda mossa: tracciare la **retta simmetrica** A’B’.

Esse si incontrano in un punto, chiamiamolo H che sta sull’asse di simmetria. Basta trovare un altro punto dell’asse e siamo a posto perché per due punti passa una ed una sola retta.

Terza mossa: tracciare la **retta** AB’

Quarta mossa: tracciare la **retta simmetrica** A’B.

Esse si incontrano in un punto, chiamiamolo K che sta sull’asse di simmetria.

L’asse di simmetria cercato è la retta HK.

Problema 19: trovare il simmetrico di un punto

La retta r è l’asse della simmetria nella quale si corrispondono in punti P e P’. Con una riga non graduata,con una cartolina, trovare il simmetrico di Q.

P

Q

--r

P’

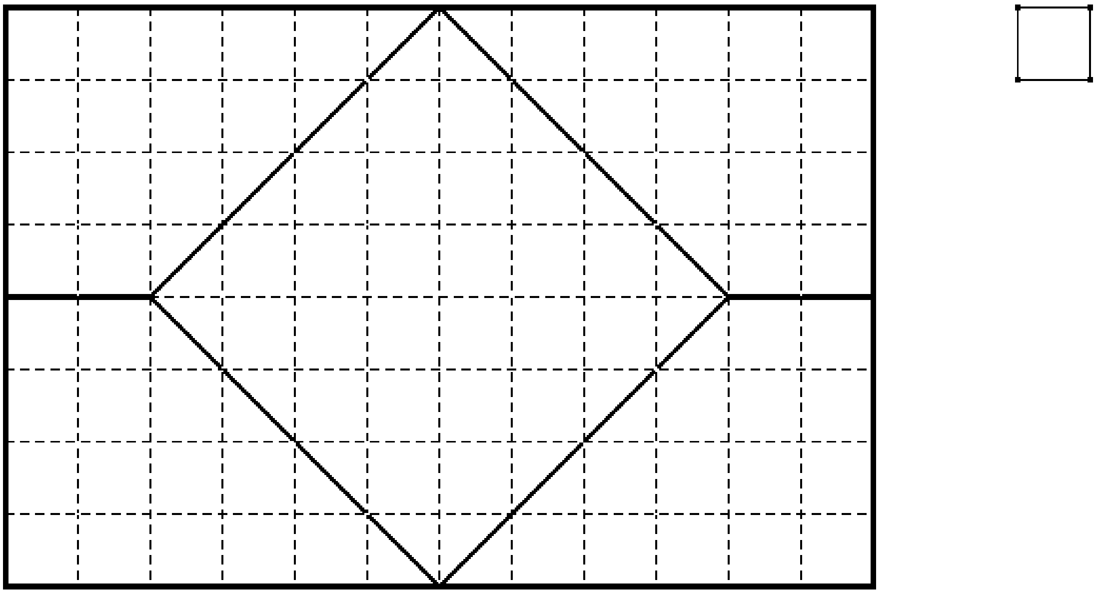
Prima mossa: tracciare la **retta** PQ. Essa incontra l’asse r in un punto, chiamiamolo H.

Seconda mossa: tracciare la **retta simmetrica** di PQ. Essa passa per P’, simmetrico di P e per H che, essendo sull’asse è punto fisso, cioè coincide con il suo simmetrico. Quindi è la retta P’H. Il punto Q’, simmetrico di Q, sta su questa retta.

Terza mossa: tracciare la **retta** P’Q. Essa incontra l’asse r in un punto, chiamiamolo K perché P’ e Q stanno in semipiani opposti rispetto all’asse r.

Quarta mossa: tracciare la **retta simmetrica** di P’Q. Essa passa per P, simmetrico di P’, e per K che, stando sull’asse coincide con il proprio simmetrico. Quindi è la retta PK. Il punto Q’, simmetrico di Q, sta su questa retta. Il punto Q’, quindi, è l’intersezione della retta P’H con la retta PK.

Problema 20 (INVALSI, 2012-2013, V elementare. Qualche modifica nel testo)



La figura che vedi racchiusa nel rettangolo è un quadrato. L'area del quadratino esterno è 1cm^2 uguale all'area di ciascun quadratino interno al rettangolo. Secondo te quanto vale , in centimetri quadrati, l'area del quadrato racchiuso nel rettangolo?

Il problema è semplice e si può trovare la soluzione semplicemente contando. Il conteggio, però, può essere fatto seguendo strategie diverse.

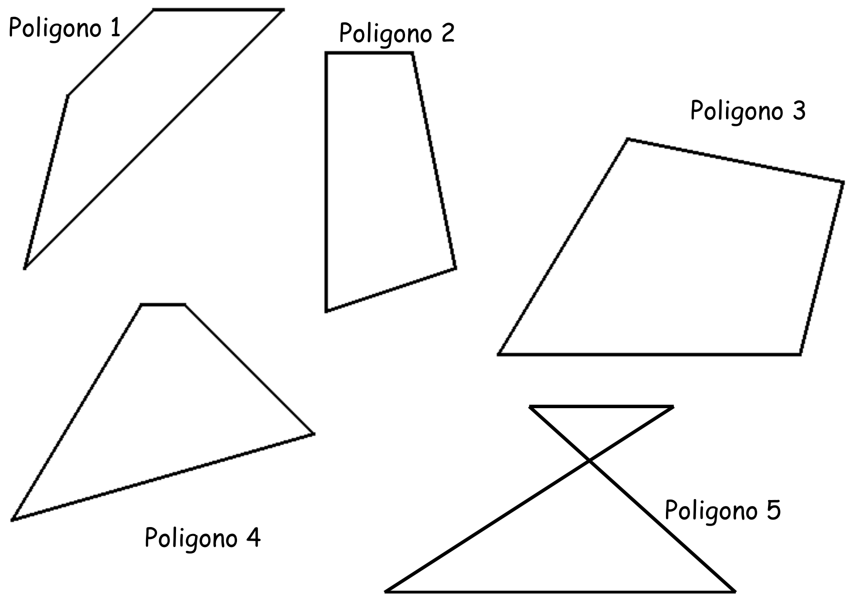
La **prima strategia** potremmo chiamarla del "conteggio totale": si contano tutti i quadratini interamente contenuti nel quadrato aggiungendo i mezzi quadratini. Si trova 32.

La **seconda strategia** potremmo chiamarla del "mezzo conteggio". Si contano quadratini e semiquadratini che stanno sopra l'asse di simmetria Est – Ovest e si moltiplica per 2. Analogamente si può sfruttare l'asse di simmetria Nord – Sud.

Una **terza strategia** non passa attraverso il conteggio, ma ricorre al fatto che le diagonali del quadrato sono perpendicolari ed applica la formula: diagonale per diagonale diviso due. Ciascuna diagonale è formata da 8 lati-quadretto e quindi: 8 x 8 /2 = 32.

Infine, alla scuola media, si può ricorrere al teorema di Pitagora, Chiamando l il lato del quadrato si ha: $l^2 = 4^2 + 4^2 = 32$ cioè l'area.

Problema 21 (INVALSI, 2012-2013, V elementare. Qualche modifica nel testo)



Qui vedi disegnati cinque quadrilateri. Anche quello a forma di clessidra (poligono 5) è un quadrilatero perché ha quattro vertici. Rispondi a queste domande:

1 – Tutti i cinque quadrilateri sono trapezi? Perché?

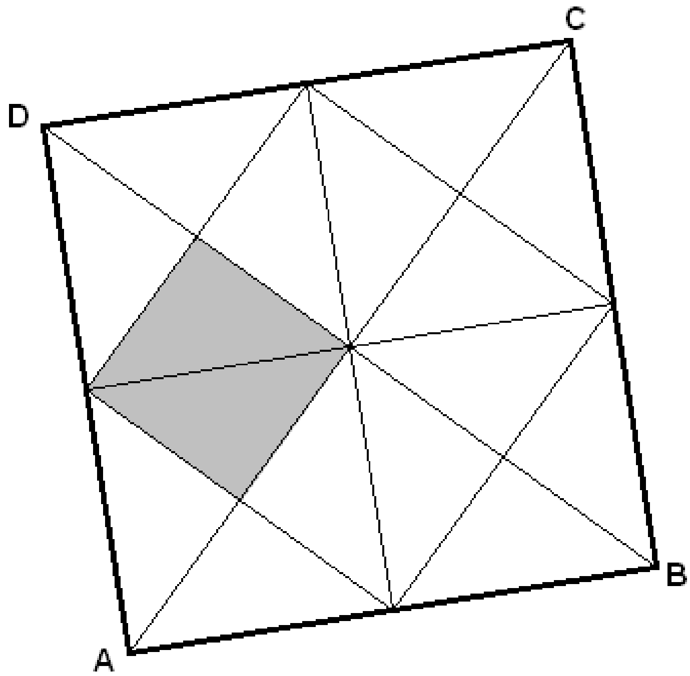
2 – Alcuni di essi sono trapezi? Perché?

3 – Quali di essi sono trapezi? Perché?

La risposta alla prima domanda è negativa perché non tutti i quadrilateri hanno una coppia di lati paralleli.

La seconda domanda è un po' insidiosa perché la parola "alcuni" nella lingua corrente indica più di uno, ma non tutti; nella lingua matematica, invece, indica "almeno uno". E' abbastanza naturale aspettarsi che la maggior parte dei bambini risponda negativamente perché uno solo dei quadrilateri è trapezio. Di conseguenza c'è da aspettarsi che alla terza domanda indichino come trapezio il quadrilatero convesso (poligono 1). La clessidra, assente nel problema dell'INVALSI, può essere o non essere una trapezio a seconda della definizione che si dà di trapezio. Se per trapezio si intende un quadrilatero che ha due lati paralleli, allora la clessidra è un trapezio e tra i cinque quadrilateri due sono trapezi. Se, invece, si intende un quadrilatero **convesso** che ha due lati paralleli, allora la clessidra non è un trapezio e fra i cinque quadrilateri uno solo è trapezio.

Problema 22: (INVALSI, 2012-2013, V elementare. Qualche modifica nel testo)



Una parte del quadrato ABCD è stata colorata. Rappresenta con una frazione questa parte colorata.

Siccome la parte colorata è un quadrato, un primo modo per trovare la frazione consiste nel contare in quanti quadrati piccoli è stato suddiviso il quadrato ABCD. Se ne contano quattro completi e, con un po' di sforzo, quattro ottenuti raggruppando coppie di triangoli. In tutto 8 e quindi la frazione è 1/8. Questa sembra la strategia suggerita dall'INVALSI che pone 1/8 fra le quattro risposte.

Forse è più spontaneo considerare ABCD suddiviso in triangoli congruenti. Complessivamente se ne contano 16 e la risposta sarebbe 2/16. Se già si sono studiate le frazioni equivalenti e si conoscono le regole per passare da una frazione ad un'altra equivalente, si perviene alla frazione 1/8.

Forse era meglio inserire fra le quattro risposte, la frazione 2/16 e non 1/8 perché le parti congruenti nelle quale viene suddiviso l'intero sono i triangoli e non i quadrati.

Siccome ABCD risulta diviso in quattro quadrati congruenti, per contare i triangoli ci si può limitare ad uno di questi quadrati e poi moltiplicare per 4. E' la strategia più economica.

CAPITOLO 9
PROBLEMI VARI

In questo capitolo propongo e commento alcuni problemi di varia natura. Alcun i potevano essere inseriti anche nei capitoli precedenti. Sui problemi – gioco rimando anche agli articoli pubblicati sulla rivista nei numeri di marzo e maggio. Altri due articoli saranno pubblicati in seguito.

Problema 1 – Il pranzo di Giovanni

Giovanni va a mangiare al ristorante insieme ai suoi genitori. Il menù del giorno prevede: risotto, scaloppine, verdura cotta, insalata mista, gelato, frutta, vino e acqua minerale. Giovanni non beve vino perché è piccolo, sceglie un solo contorno e non mangia risotto perché è allo zafferano. Come sarà il pranzo di Giovanni? Confronta la tue risposte con quelle dei tuoi compagni.

Il pranzo di Giovanni ha alcuni punti fissi: non beve vino, non mangia risotto e sceglie un solo contorno. Tutto il resto può far parte del pranzo di Giovanni, ma non è detto che egli mangi tutto. Anche in questo caso ci sono almeno due possibili pranzi: uno con la verdura cotta e l'altro con l'insalata mista. Probabilmente ogni bambino farà la sua proposta (o le sue proposte) in base ai suoi gusti personali. Per esempio, se a qualcuno non piace la frutta potrebbe non includerla nel pranzo di Giovanni. Nella discussione finale si confrontano le varie risposte e si può indagare sul perché delle proposte che ciascuno ha fatto.

Come si vede è un problema senza numeri, senza figura, senza misure, ma ugualmente interessante.

Problema 2: due personaggi famosi

Matteo dice che lo 0 non è né pari né dispari perché è neutro. Luca, seguendo il ragionamento di Matteo, afferma che anche 1 non è né pari né dispari perché è neutro. Vuoi aiutarli a chiarirsi le idee?

Il problema può prestarsi per fare un po' di storia dello 0 e per illustrarne l'identikit. Sullo zero c'è una vasta letteratura. Io mi limito a segnalarvi il capitolo 1: "Il grande boss: lo zero" degli appunti del corso di aggiornamento del 2011 – 2012: "Alla ricerca delle virtù nascoste dei numeri e dei loro risvolti didattici".

La parola "neutro", in matematica non indica una proprietà intrinseca di un "personaggio", ma semplicemente il suo comportamento rispetto ad una operazione. La parola "neutro", appiccicata allo 0, come è ben noto, indica il suo comportamento rispetto alla addizione, comportamento completamente diverso che lo stesso personaggio ha rispetto alla moltiplicazione. Lo 0 è un numero, non è il "nulla", ed è un numero pari perché è somma di due numeri uguali (0 = 0 + 0).

La parola "neutro" appiccicata al numero 1 indica il suo comportamento rispetto alla moltiplicazione. Il numero 1 è un numero dispari perché non è somma di due numeri uguali.

Problema 3: giocare con i dadi

Giocando con due dadi e calcolando la somma delle due facce che si presentano, Giorgio afferma che la sua probabilità di vincere è 3/36. Quanti sono i casi possibili? Sull'uscita di quale numero può avere puntato Giorgio?

Quando si gioca con un dado è immediato dire che i casi possibili sono 6. Se si gioca con due dadi è forte la tentazione di affermare che i casi possibili sono 12 invece che 36. Per questo nella frazione che esprime la probabilità abbiamo lasciato al denominatore 36, evitando di semplificare la frazione, per indirizzare verso la risposta esatta. Per rispondere alla seconda domanda, una strategia efficace consiste nel costruire la tabella della addizione con i numeri da 1 a 6. Nella tabella compaiono 36 numeri, tanti quanti sono i casi possibili. Per conoscere su quali numeri Giorgio può avere puntato basta vedere quali numeri nella tabella, compaiono 3 volte. Si tratta del numero 4 che si ottiene sommando 1 e 3, 2 e 2 e 3 e 1; e del numero 10 che si ottiene sommando 4 e 6, 5 e 5, e 6 e 4.

Il problema si potrebbe allargare ricercando i numeri che hanno probabilità minima di presentarsi (sono 2 e 12) ed il numero che ha probabilità massima (è il numero 7 la cui probabilità è 6/36).

Problema 4: le due torte (INVALSI, 2011-2012, classe quinta)

La zia Elena va in pasticceria e compra una torta al cioccolato e una torta alla panna. Paga in tutto 24 euro, ma la torta al cioccolato costa 6 euro in più della torta alla panna. Quanto costa la torta alla panna? Scrivi come hai fatto a trovare la risposta.

Il problema è semplice, ma può essere affrontato con strategie diverse.

Una **prima strategia** potremmo chiamarla del "togliere ciò che cresce". Dei 24 euro spesi dalla zia Elena, 6 vanno per la torta al cioccolato (sono i 6 euro che crescono). I 18 euro rimanenti si dividono in parti uguali fra le due torte. Quindi 9 euro a testa. La torta alla panna costa 9 euro.

La **seconda strategia** potremmo chiamarla della "partenza alla pari". Indicati con tp il prezzo della torta alla panna e con tc quello della torta al cioccolato si può costruire questa tabella:

tp	tc	totale	
12	12	24	la differenza è 0
10	14	24	la differenza è 4
9	15	24	siamo arrivati alla fine.

Una **terza strategia** possiamo chiamarla del "salvare la differenza". Si assegna un prezzo verosimile alle due torte in modo che la differenza dei prezzi sia 6 euro. Per esempio:

tp	tc	totale
10	16	26 non ci siamo
9	15	24 trovata la soluzione

Una **quarta strategia**, che possiamo chiamare "algebrica", indicando con p il prezzo della torta alla panna e con c quello della torta al cioccolato, ci porta a scrivere, usando la prima informazione,

$p + c = 24$; la seconda informazione ci dice che $c = p + 6$. Quindi: $p + p + 6 = 24$; cioè

$2p = 18$. Da cui $p = 9$.

Problema 5: giocare con la tabella della moltiplicazione

"In un sacchetto ci sono 100 biglietti. Su ognuno di essi è scritto un numero che compare nella tabella della moltiplicazione dei numeri da 0 a 9. Come sai i numeri della tabella e, quindi, i numeri scritti sui bigliettini, vanno da 0 a 81. Pescando un biglietto a caso qual è la probabilità di estrarre un biglietto con scritto il numero 0? E con scritto il numero 3? E con scritto il numero 10? Per vincere un premio ti conviene puntare su un numero pari o su un numero dispari?" Perché?

Per rispondere alle domande è necessario consultare la tabella della moltiplicazione e contare quante volte compaiono i numeri richiesti. Ci si accorge che la probabilità di pescare un biglietto con scritto 0 è molto alta, cioè 19/100 dovuta al fatto che lo 0 è elemento assorbente nella moltiplicazione; la probabilità di pescare un biglietto con il 3 è molto bassa (2/100) perché 3 è un numero primo; stessa probabilità ha il 10 perché l'intestazione della tabella si ferma al 9. Per vincere un premio conviene punta sul pari. Questo lo si può vedere "leggendo la tabella" della moltiplicazione, ma la cosa è un po' faticosa e lunga. E' più comodo e semplice ricorrere alla tabella moltiplicativa del Pari e del Dispari

x	**P**	**D**
P	P	P
D	P	D

Dei quattro casi possibili, tre sono per il pari e uno per il dispari. La probabilità di pescare un numero pari è ¾, cioè il 75%.

Problema 6: Una famiglia numerosa

“La famiglia di Biagio è decisamente numerosa. Il numero delle sue sorelle è doppio del numero dei suoi fratelli. Sua sorella Mariuccia ha 1 sorella in più dei fratelli. Quanti bambini e bambine ci sono nella famiglia di Biagio e di Mariuccia?”

Il problema non è facile e necessita di un attenta riflessione. Si può risolvere collettivamente.

Teniamo fisso Biagio e ragioniamo sui dati del problema.

Biagio può avere 1 fratello. Allora deve avere 2 sorelle, Mariuccia e un’altra. Questa non può essere la soluzione del problema perché è vero che il numero delle sorelle di Biagio è doppio del numero dei suoi fratelli, ma Mariuccia ha 2 fratelli (Biagio + 1) e 1 sola sorella e non una sorella in più dei fratelli.

Biagio può avere 2 fratelli. Allora deve avere 4 sorelle, cioè Mariuccia e altre 3. Anche questa non può essere la soluzione del problema perché Mariuccia avrebbe 3 fratelli (Biagio + 2) e 3 sorelle e non 1 sorella in più dei fratelli.

Biagio può avere 3 fratelli. Allora deve avere 6 sorelle, Mariuccia e altre 5. Questa è la soluzione perché il numero delle sorelle di Biagio è doppio del numero dei fratelli e Mariuccia ha 4 fratelli (Biagio + 3) e 5 sorelle, cioè 1 in più del numero dei fratelli.

Possiamo riassumere tutto in questa tabella (ricordando che Mariuccia è una delle sorelle):

F	S	
1	2	(Mariuccia avrebbe 1 sorella e 2 fratelli)
2	4	(Mariuccia avrebbe 3 sorelle e 3 fratelli)
3	6	(Mariuccia avrebbe 5 sorelle e 4 fratelli).

Il totale dei bambini e delle bambine è 10.

Problema 7: problema o scherzo?

Per non ingrassare troppo un uomo decide di fare tutti i giorni un po’ di moto e stabilisce di percorrere ogni giorno, a partire da lunedì, il ***doppio*** *dei chilometri percorsi il giorno precedente. Però il lunedì piove e resta a casa. Quanti chilometri percorrerà in una settimana?*

Non so se questo è un problema o uno scherzo. Certo richiede una lettura attenta delle informazioni. Qualche bambino potrebbe far partire il proposito del moto da martedì e fare i calcoli. Una eventuale lettura collettiva del testo potrebbe svelare l’arcano.

Problema 8: **E' proprio conveniente?**

"Una cooperativa che si occupa di informatica è composta da un presidente e da altri 6 soci. Il presidente ha uno stipendio annuo di 110 000 euro. I due soci più anziani hanno uno stipendio annuo di 20 000 euro e gli altri quattro soci si devono accontentare di 15 000 euro all'anno. Il presidente, per raccogliere nuovi soci, pubblica un annuncio su un giornale scrivendo che lo stipendio medio annuo di un socio è di 30 000 euro all'anno. Secondo te è proprio conveniente diventare soci della cooperativa? Perché?"

Lo stipendio medio di ogni socio proclamato dal presidente è un classico esempio di "Cicero pro domo sua", e può venire il sospetto che il presidente abbia esagerato un po'. Il sospetto può nascere dal fatto che, a parte il presidente, tutti gli altri soci hanno uno stipendio annuo decisamente inferiore ai 30 000 euro. La prima cosa da fare, quindi, è di verificare l'esattezza dell'annuncio del presidente calcolando la **media aritmetica** degli stipendi. Lo stipendio totale annuo dei soci è:

110 000 + 2 x 20 000 + 4 x 15 000 = 210 000.

Dividendolo per 7, numero dei soci, si verifica l'esattezza della informazione data dal presidente. Verrebbe voglia di diventare socio della cooperativa, ma…Il problema fornisce altre informazioni. La **moda** degli stipendi, cioè lo stipendio che si presenta con maggior frequenza, è solo 15 000 euro. Un aspirante socio della cooperativa, con molta probabilità, dovrebbe partire dallo stipendio "moda". Forse la voglia di diventare socio diminuisce un po'. Come mai, allora, ci si potrebbe domandare, la media aritmetica degli stipendi è così alta? Il motivo è che la media aritmetica è influenzata dai valori "estremi", in questo caso dallo stipendio altissimo del presidente. E' questo stipendio che "alza la media".

Un altro indice statistico, che si desume dal problema, è la **mediana** che si ottiene mettendo in fila ordinatamente tutti gli stipendi e vedendo quale è lo stipendio centrale. Ebbene si ha:

15 000 15 000 15 000 15 000 20 000 20 000   110 000.

Lo stipendio centrale è ancora 15 000.

La voglia di diventare soci, forse, cessa completamente.

La "morale" del problema è che i tre indici statistici danno delle informazioni parziali e, quindi, è sempre meglio non fermarsi a uno solo. Conviene, inoltre, quando si vogliono calcolare i valori medi, precisare l'obiettivo in vista del quale si vuole fare il calcolo per vedere quale può risultare il più conveniente.

Problema 9: il cartello sul ponte

Maurizio ieri all'inizio di un ponte un po' pericolante, ha visto questo cartello: vietato il transito ai camions di peso superiore a 15,00 tonnellate. Siccome a scuola gli avevano insegnato che gli zeri dopo la virgola non contano niente, ha concluso che si potevano togliere i due zeri oppure aggiungerne altri. Condividi anche tu il pensiero di Maurizio? Perché?

Cartelli come quelli del problema, e altri dello stesso tipo riguardanti, per esempio, le distanze fra due luoghi, esistono veramente. Hanno significato? E se si quale?
E’ vero che in classe si afferma che gli zeri dopo la virgola non contano niente. Per esempio:

15 = 15,0 = 15,00 = 15,000, ecc.

Queste uguaglianze sono vere quando si tratta di numeri puri, cioè di numeri considerati in se stessi e non relazionati ad attività di misurazione, cioè sono numeri che non esprimono il risultato di una misurazione. E’ vero che se al numero 15 aggiungo 0 decimi, cioè passo a 15,0 non ho modificato il valore del numero dato che 0 è elemento neutro rispetto alla addizione.

Nel problema, però, il numero 15,00 è seguito dalla parola “tonnellate” cioè da una unità di misura di peso (ci adeguiamo al testo del problema). Questo numero, quindi, è relazionato ad una attività di misurazione ed esprime la accuratezza della misurazione.

La parte intera, 15, indica il numero delle tonnellate, cioè 1 000 kilogrammi. Per inciso: questa unità di misura, e il suo simbolo t, è ammessa a tempo indeterminato. Un camion di 16 tonnellate non può mai passare, uno di 14 può sempre passare.

Il primo 0 dopo la virgola indica i decimi di tonnellata, cioè i quintali. L’uso del termine “quintale” e del suo simbolo q sono vietati dal 1981. Deve essere sostituito con la locuzione 100 kilogrammi. La presenza del primo 0 dopo la virgola dice che devono essere 0 i quintali trasportati dal camion (oltre alle 15 tonnellate).

Il secondo 0 dopo la virgola indica i centesimi di tonnellata cioè 10 kilogrammi. Una volta si usava il termine “miriagrammo” cioè 10 000 grammi. L’uso di questo termine ora è vietato. La presenza del secondo 0 dopo la virgola dice che anche i miriagrammi devono essere 0, cioè oltre alle 15 tonnellate il camion non può trasportare 10 kilogrammi.

In definitiva possono passare i camions di 15 tonnellate e 9 kilogrammi.

Come si vede in questo caso e nelle situazioni analoghe gli zeri dopo la virgola contano.

Problema 10: un viaggio in città

Devo andare in città ed ho due possibilità. Posso prendere un taxi che mi costa 1,50 euro al chilometro, oppure noleggiare una macchina che mi costa 20 euro di fisso e 0,50 euro al chilometro. Che cosa mi conviene fare?

Qui bisogna accorgersi che c’è una variabile nascosta: il numero dei chilometri da percorrere. Credo che i bambini se ne possano accorgere facilmente. Con essi si può fare il gioco delle previsioni. Quei 20 euro di fisso mi dicono che fino a 10 chilometri, mi conviene prendere il taxi (mi costa 15 euro); con 15 chilometri il taxi mi costa di più di 20 euro, però entra in gioco il costo chilometrico del noleggio. Allora posso incominciare i conti da 10 chilometri e proseguire fin che trovo la parità (se esiste) e poi il vantaggio del noleggio. Può nascere una tabella come questa, dove km indica il numero dei chilometri, t il costo del taxi ed m il costo della macchina a noleggio.

km	t	m	
10	15	20 + 5	conviene taxi
15	22,5	20 + 7,50	conviene taxi
20	30	20 + 10	costo uguale
21	31,50	20 + 10,50	conviene noleggio

Alla scuola media (o un adulto), si può ricorrere ad una equazione (o a una disequazione).

Indichiamo con x il numero dei chilometri. Il costo del taxi è 1,50 x; quello del noleggio è 20 + 0,50 x. Uguagliando questi due costi troviamo il numero dei chilometri che rendono indifferente la scelta del mezzo:

$1{,}50\ x = 20 + 0{,}50\ x \rightarrow 1{,}50\ x - 0{,}50\ x = 20 \rightarrow 1\ x = 20$

Per 20 chilometri il costo è uguale.

Con la disequazione $1{,}50\ x < 20 + 0{,}50\ x$ troviamo $x < 20$: conviene il taxi.

Con la disequazione $1{,}50\ x > 20 + 0{,}50\ x$ troviamo $x > 20$: conviene il noleggio.

Problema 11: aumenta o diminuisce?

Marco e Luca sono due ragazzi di quinta elementare. Hanno studiato le aree e le percentuali. Marco dice a Luca: ho disegnato un rettangolo con la base lunga 20 centimetri e l'altezza lunga 10 centimetri. Calcolare la sua area è facile: basta fare base per altezza. Se aumenta la base del 10% e diminuisco l'altezza del 10% penso che il nuovo rettangolo avrà un'area maggiore. Che te ne pare? Penso come te, risponde Luca, però facciamo i conti.

Il pensiero dei due amici sembra abbastanza condivisibile dato che è stata aumentata del 10% la dimensione maggiore e diminuita del 10% quella minore. Purtroppo i conti danno una risposta diversa. Il nuovo rettangolo avrà una base lunga 22 centimetri ed una altezza lunga 9 centimetri. L'area del nuovo rettangolo sarà, in centimetri quadrati, 22 x 9 = 198 mentre quella del rettangolo di partenza era di 200 cm^2.

I due amici stentano a crederci e pensano che, forse, è colpa del fatto che la base è il doppio dell'altezza. Decidono, quindi, di avventurarsi in calcoli con le lettere, chiedendo un aiuto alla maestra.

Chiamiamo, dicono, b la base e a l'altezza. L'area è: A = b x a.

Aumentiamo la base del 10% e diminuiamo l'altezza del 10%. Il nuovo rettangolo avrà area:

A = (b + 1/10 b) x (a – 1/10 a) = b x a – 1/10 b x a + 1/10 b x a – 1/100 b x a = b x a – 1/100 b x a.

I due amici si arrendono: nelle situazioni descritte dal problema l’area del rettangolo diminuisce sempre.

NOTA

Questo calcolo può certamente essere fatto nella scuola media. Nella scuola elementare, scrivendo 1/10 come numero con virgola (0,1) non dovrebbe essere impossibile affrontare il problema in generale.

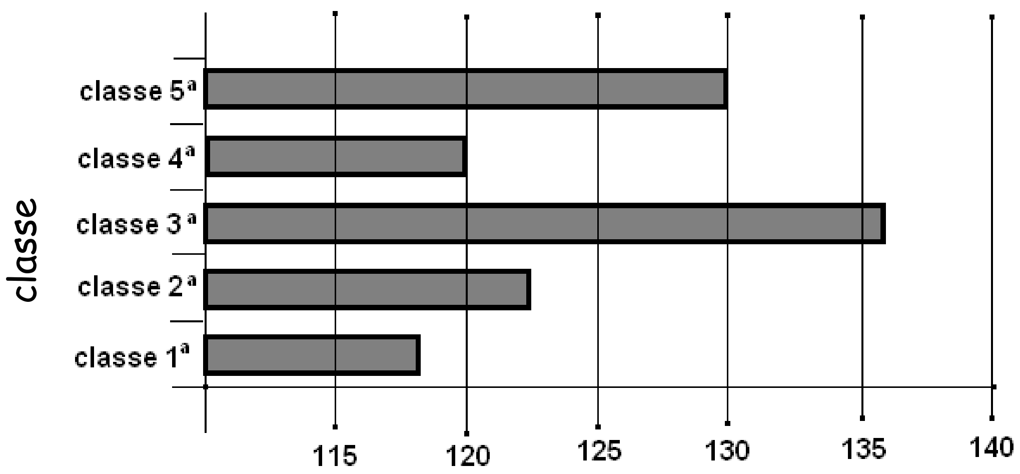
Problema 12: numeri fissi e posti ballerini

La maestra schiera in fila uno per uno gli alunni della sua classe. Osservandoli per bene nota che contando da sinistra Giovanni è all’ottavo posto, ma non è l’ultimo; contando da destra Marco è all’ottavo posto, ma non è il penultimo. Qual è il numero minimo degli alunni della classe? Tutti i numeri maggiori di questo numero minimo possono essere soluzione del problema? Perché?

Gli alunni della classe sono almeno 9 dato che Giovanni non è l’ultimo. Con 9 alunni, però, Marco risulterebbe il penultimo. Quindi gli alunni sono almeno 10. Con 10 alunni Marco risulta essere il terzultimo. Questa è la prima soluzione e 10 è il numero minimo degli alunni. Le cose funzionano anche con 11, 12, 13, 14 alunni. Marco si trova sempre alla sinistra di Giovanni e si avvicina a lui progressivamente. Se gli alunni fossero 15 i due alunni verrebbero a trovarsi allo stesso posto. Quindi gli alunni non possono essere 15. Sono soluzioni anche i numeri seguenti, 16, 17, 18, ecc. con Marco che si è spostato a destra di Giovanni. Per risolvere il problema conviene rappresentare gli alunni, per esempio con puntini. Un problema non difficoltoso, ma con parecchie soluzioni.

Problema 13: : (INVALSI, 2011-2012, V elementare. Qualche modifica nel testo)

La scuola elementare “Don Milani” è una scuola molto grande. Gli alunni di una classe quinta, consultando i registri della scuola relativi all’anno scolastico 2009 – 2010 hanno compilato questo grafico che rappresenta il numero di alunni per gruppi di classi (gruppo delle classi prime, gruppo delle classi seconde, ecc).



Giovanni, un bambino della classe quarta, osservando il grafico, afferma che gli alunni del gruppo delle classi quinte sono il doppio di quelli del gruppo delle classi quarte. Giovanni ha ragione? Perché?

Io avrei usato il plurale: classi e poi classi 1^e, classi 2^e, ecc.

Questo è un tipico grafico che, se non letto attentamente, può trarre in inganno. Nel grafico, ciò che colpisce l'occhio e che attira l'attenzione, sono i rettangoli rappresentativi dei vari gruppi di classe. Effettivamente il rettangolo delle classi quinte è lungo il doppio del rettangolo delle classi quarte. Di qui la conclusione di Giovanni. Bisogna leggere il grafico nella sua completezza e vedere quanti alunni rappresenta il rettangolino compreso fra due barre verticali dopo la prima. Sono 5 gli alunni come si legge nella ascissa. Perciò la conclusione di Giovanni è sbagliata.

PARTE TERZA

INVALSI: CONSIDERAZIONI GENERALI E PROBLEMI

CAPITOLO 10

Maria Pia D'Argenzio

Valutazione esterna degli apprendimenti e Problemi

1.**Valutazione…. Liberiamoci da alcuni equivoci**

Quando si parla di valutazione spesso si confondono le diverse "tipologie" che sono previste dal sistema normativo che possiamo così sintetizzare:
1. *Valutazione periodica ed annuale* degli apprendimenti e dei comportamenti propria dei docenti della scuola
2. *Valutazione finale di periodi didattici* (esami finali) che compete alle commissioni di esame e che in Italia vede in III secondaria inferiore tra le altre una prova che proviene dal Servizio di valutazione Nazionale. L'esito della Prova Nazionale Invalsi contribuisce, dal 2009, alla formulazione della valutazione finale del singolo allievo per un punteggio massimo pari ad un sesto dei punti totali (10/10), quindi in una misura non ancora determinante per l'esito finale di ogni alunno (in altri stati europei è determinante).
3. *Valutazione esterna* che ha la finalità di valutare l'efficienza e l'efficacia del sistema istruzione nel suo complesso, inquadrando la valutazione nel contesto internazionale. Si occupa quindi di studiare le cause dell'insuccesso e della dispersione scolastica, di rilevarne difficoltà, punte di eccellenza, di criticità, e tutte le problematiche di interesse per il gestore dei servizi nazionali scolastici.
Le prove di valutazione esterna sono state introdotte in alcuni paesi della comunità europea nell'ultimo decennio sulla spinta del trattato di Lisbona sull'educazione e a seguito delle problematiche sorte in conseguenza agli esiti- non sempre positivi- di prove internazionali quali PISA, TIMMS PEARLS etc. somministrati nei singoli paesi.
Le prove di valutazione esterna e la loro analisi hanno mostrato, in qualunque Stato siano state introdotte e gestite correttamente, una evidente utilità informativa sia per gli organi di governo sia per le singole scuole. Ma è ancora lunga la strada, nei Paesi nei quali solo recentemente sono state introdotte, per un corretto utilizzo delle informazioni derivanti dagli esiti delle prove ai fini di una policy educativa più consapevole e ai fini di un reale miglioramento dell'attività didattica nelle singole scuole.

In Italia l'Invalsi è stato istituito nel 1999 e nel corso di questi anni ha subito dal punto vista legislativo alcuni " riordinamenti" (nel 2004 e nel 2009) che ne hanno esplicitato e precisato i compiti istituzionali e funzionali. L'Istituto italiano ha realizzato dei Progetti Pilota di valutazione esterna dal 2001 al 2004. Successivamente le prove vennero somministrate talora con il criterio della obbligatorietà talora solo campionarie, ma dal 2008 esse sono diventate censuarie per le classi stabilite da una direttiva ministeriale da emanarsi ogni triennio. In Italia attualmente sono sottoposte a valutazione esterna le classi seconda e quinta primaria; la prima secondaria inferiore e la seconda secondaria superiore, anche se tali scelte di classi sono soggette a cambiamenti nel corso del tempo in base alle direttive emanate dal Ministro e dalle proposte del Servizio Invalsi per una maggiore efficacia delle rilevazioni. Inoltre nella terza classe della secondaria inferiore è prevista una Prova Nazionale predisposta dall'Invalsi.

I contenuti delle domande delle prove si basano sul quadro di riferimento predisposto dagli esperti disciplinari Invalsi . Il quadro di riferimento presenta i principali punti di riferimento concettuali, i collegamenti con le indicazioni di legge, le idee chiave che guidano la progettazione delle prove, gli ambiti di contenuto ed i processi cognitivi .Il Quadro di Riferimento definisce quindi *quali* apprendimenti in matematica si valutano e *come* vengono valutati ed è in continua evoluzione per adeguarsi sempre di più alle finalità proprie delle prove. E' ovvio che non tutto il "sapere " matematico è "adatto" o "adattabile " a prove di valutazione esterna e che quindi argomenti ed attività ricchi di significato non sempre sono trasformabili in quesiti che devono avere determinati requisiti quali la generalizzabilità, l'immediatezza , la semplicità espressiva (anche se non sempre ci riescono!).

Inoltre su questo tipo di prove esistono in campo pedagogico delle visioni molto differenti che sinteticamente potremmo riassumere tra i due estremi " tanto più la prova è priva di contesti, di parole e di varietà di obiettivi tanto più sarà informativa sul singolo aspetto di un apprendimento" – utile per avere informazioni puntuali su apprendimenti di tipo nozionistico (da non buttare a mare!) fino all'estremo opposto che "le prove debbano valutare competenze" e per competenze ci si riferisce tra le tante definizioni a quella data dall'Unione Europea e recepita dall'Italia nel 2007: "Le competenze indicano la comprovata **capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e/o personale**" e quindi prove in "contesto" che fanno appello sia a conoscenze sia all'uso critico e ragionato delle conoscenze stesse.

Abbiamo invece ancora autorevoli "esperti " che affermano ad esempio " *Le prove Invalsi sono una mostruosità, una cosa senza alcun senso, che può servire se mai a premiare chi è dotato di un po' di memoria più degli altri, non chi ha spirito critico. Poiché la scuola dovrebbe essenzialmente far nascere lo spirito critico, la miglior cosa sarebbe eliminare l'Invalsi e restituire i suoi test a chi li ha inventati"* Luciano Canfora (filologo classico, storico e saggista italiano).

Penso che al di là di sterili atteggiamenti di rifiuto o di acritica accettazione ed esaltazione delle prove sia utile riconoscere nelle prove Invalsi un utilissimo strumento per individuare gli obiettivi di miglioramento della nostra attività d'aula e analizzandoli criticamente identificare processi cognitivi e macroaree di conoscenza da sviluppare.

2. I problemi nelle prove a scelta multipla.

Le prove Invalsi nelle prime formulazioni (progetti Pilota e prime rilevazioni censuarie) presentavano solo quesiti a risposta multipla, per problematiche legate alla correzione delle prove stesse che era attuata col sistema ottico in via centralizzata.
Verrebbe da pensare che le prove orientate su obiettivi di contenuto piuttosto precisi fossero alquanto nozionistici e si potessero prestare a critiche del tipo soprariportato. Andando però a spulciare tra i quesiti si trovano dei quesiti strutturati in forma di problemi non banali ed indicativi anche di competenze. Si nota comunque una preoccupazione da parte degli autori di non costruire quiz ma di proporre problemi senza automatismi.
Per gli esempi che seguono non riporto le percentuali di risposte corrette in ambito nazionale che in molte scuole e specie per la scuola primaria furono inficiate dal cheating (dai suggerimenti degli insegnanti). Comunque anche se con notevole cheating gli esiti diedero informazioni particolarmente utili sia agli organi di governo sia (per quelli che vollero utilizzarli) agli insegnanti individuando già alcuni ambiti di fragilità, alcuni punti di forza etc..

Esempio. 1. Anno scolastico 2006-2007. I media

Chiara va al cinema con i suoi due fratelli e i genitori. Il film inizia alle 16.30. I biglietti costano 7,5 € per ogni adulto e sono ridotti per i bambini. A quale delle seguenti domande si può rispondere con queste informazioni?”

- □ A. Quanto dura il film?
- □ B. Quanto viene a costare in tutto la visione del film?
- □ C. Quanto costa l’entrata dei genitori?
- □ D. Quanto costa l’entrata dei bambini?

Il quesito , piuttosto semplice, coinvolge comunque la capacità di leggere il testo di un problema, di identificarne le informazioni contenute e di conseguenza sapere a quale domanda, tra quelle proposte si può rispondere.

Esempio 2 . Anno scolastico 2006-2007 I media

“*Per organizzare una gita la scuola spende 350 euro per il pullman, 5 euro a persona per il biglietto d’ingresso al museo, 480 euro per il pranzo al ristorante. Sapendo che gli insegnanti non pagano, quanto spenderà ogni ragazzo?*
In questo problema manca un dato per poterlo risolvere. Quale?”

- □ A. Luogo della gita.
- □ B. Numero delle classi partecipanti.
- □ C. Numero degli alunni partecipanti.
- □ D. Numero degli insegnanti.

In questo quesito il testo è un po' lungo e forse l'inizio della frase con un gerundio non fu la scelta migliore, ma è comunque interessante perché attivava da parte dell'allievo la ricerca (tra quelle proposte) dell'informazione indispensabile per poter rispondere.

Esempio 3 . Anno scolastico 2006-2007 I media

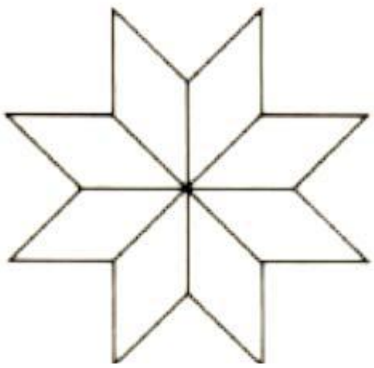
Questo quesito è invece un classico" problemino" nel quale la risposta è agevolata dalla scelta multipla

Una ditta ha prodotto 2000 caramelle e con queste confeziona 20 pacchetti di 20 caramelle ciascuno e 30 sacchetti da 50 ciascuna. Quante caramelle rimangono?

□ A. 0
□ B. 100
□ C. 400
□ D. 500

Esempio 4 . Anno scolastico 2002-2003 I media

La figura è formata da 8 rombi uguali tra loro.



La misura di ogni angolo ottuso del rombo è…

□ A. 90°
□ B. 100°
□ C. 135°
□ D. 150°

Questo quesito, proposto nel primo progetto pilota è caratterizzato dal tentativo di usare il minor numero possibile di parole per rendere il più possibile inequivocabili le richieste. Ha un'informazione imprecisa (ogni angolo "ottuso" nella domanda e nelle risposte c'è anche 90° che è misura dell'angolo retto..)
Il problema comunque richiedeva la capacità di identificare l'angolo giro : dividere per 8 e calcolare il supplementare: si poteva ragionare sia utilizzando la nozione che angoli adiacenti in un rombo misurano 180° oppure togliere da 360° cioè dalla somma i due angoli acuti e poi dividere per due il risultato.

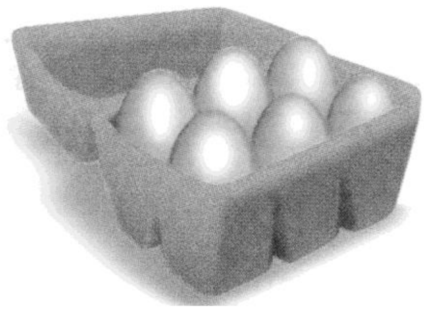
Esempio 5 . Anno scolastico 2006-2007 I media

Marco ha indicato correttamente le operazioni necessarie per risolvere un problema. Esse sono (50 – 12) : 2
Quale dei seguenti problemi ha risolto Marco?
□ *A. Alberto divide cinquanta soldatini in due schieramenti. Uno dei due schieramenti perde dodici soldatini. Quanti soldatini rimangono in ogni schieramento?*
□ *B. 2 amici vanno ad un concerto. Alla fine uno di loro paga con un biglietto da 50 € e riceve il resto di 12 €. Quanto costa il biglietto del concerto?*
□ *C. Giovanni ha comperato 50 chiodi che costano 12 centesimi ciascuno e li utilizza per 2 diversi lavoretti. Quanti chiodi usa per ogni lavoretto?*
□ *D. Matteo riceve 50 € dalla nonna. Ne spende 12 per una pizza e poi compra un gioco per il computer e un compact disc. Quanto costa il gioco?*

Anche questo quesito, pur sempre a risposta multipla, richiedeva non solo conoscenze ma la capacità di identificare con chiarezza le operazioni così come indicate e di comprendere il significato di ogni problema posto (è chiaro che con la risposta multipla, una volta individuata come corretta l'opzione B, l'alunno può fermarsi nell'analisi degli altri testi..).

Esempio 6 . Anno scolastico 2006-2007 II primaria

La mamma per fare una grande frittata per gli amici di Marco usa due di queste confezioni di uova. Quante uova ha usato?



□ A. 3
□ B. 6
□ C. 12

Questo quesito, nonostante il cheating , ebbe risultati abbastanza bassi per gli esiti della II primaria (55%) : possiamo chiaramente comprendere come l'esito negativo sia stato causato non dalla incapacità di contare le uova nel contenitore due volte quanto di aver privilegiato la foto e trascurato nella lettura (spesso affrettata in sede di prova Invalsi) il termine " due" di queste confezioni. Riemerge ancora e non solo da questo quesito come uno dei problemi principali per un buon esito nelle prove stia nella capacità di lettura, nella comprensione del testo anche nei suoi " impliciti" come vedremo nelle prove degli anni successivi.

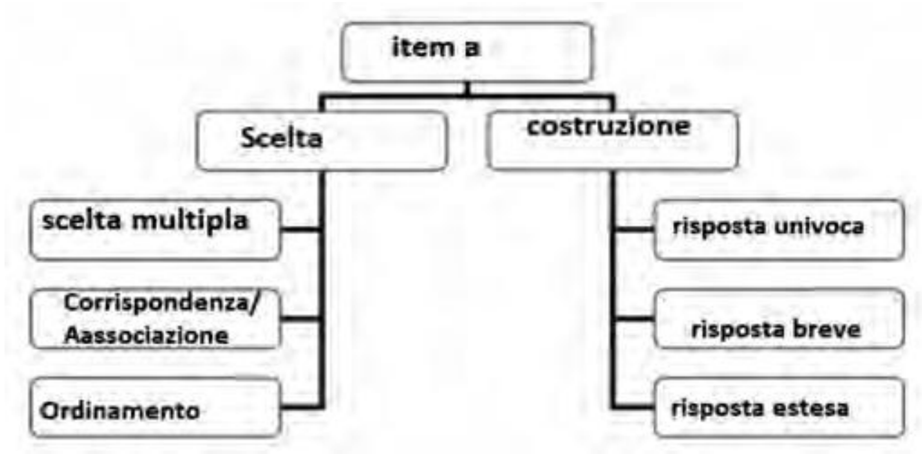
3. Le prove di valutazione esterna : tipologie ed esempi

Tipologie di prove

Dopo il riordino dell'Invalsi del 2008/09 e l'introduzione della Prova Nazionale per la terza media le prove di valutazione assumono un diverso carattere: le correzioni vengono lasciate alle scuole e non è più necessario che le prove siano solo a scelta multipla ma vengono così configurate :

1. **Prove a scelta multipla**
2. **Prove a scelta multipla complessa del tipo Vero/Falso oppure Sì/No**
3. **Prove a domanda aperta a risposta univoca**
4. **Prove a domanda aperta a risposta articolata che vengono poi suddivise in :**
   a) **Richiesta di descrivere un procedimento o un calcolo (RC)**
   b) **Richiesta di giustificare una risposta o una scelta (RG) che a sua volta si articola in richiesta di**
      I. **giustificazione di una risposta**
      II. **giustificazione di una scelta.**
5. **Prove " Cloze"**

Queste tipologie di prove si ritrovano ben rappresentate e spiegate sia nelle prove internazionali (Pisa e Timms) consultabili sul sito dell'Invalsi [1]sia anche nelle prove prodotte da vari paesi europei. Altri paesi attuano classificazioni similari: ad esempio l'istituto di valutazione portoghese fino al 2010 classificava i quesiti delle prove solo in "item a scelta multipla" o "item a risposta aperta (per lo più univoca)" ma con frequenti richieste di giustificazione (RG) o di esplicitazione dei calcoli compiuti (RC) . Dal 2011 gli item sono stati classificati in modo diverso secondo il seguente schema che trovo interessante e che per questo riporto :
Schema tipologie prove GAVE (istituto di valutazione portoghese)



Lo Schema di classificazione dei quesiti viene così illustrato dall'istituto di valutazione portoghese (Gave) :
Item di scelta : L'alunno sceglie la risposta a partire dalle diverse ipotesi presentate dall'item.
Per rispondere, registra gli elementi che identificano la sua scelta (il modo di registrare la sua scelta è esplicitata negli enunciati delle domande)
Sono esempi di item a scelta quelli :

[1] www.invalsi.it

- a scelta multipla ;(si sceglie una tra le varie opzioni proposte) ;
- associazione o corrispondenza (si collegano tra loro alcune opzioni proposte) ;
- si ordinano le varie opzioni proposte ;

Item di costruzione : l'alunno esaminando il quesito produce la risposta.

Sono esempi di item di costruzione :

- a risposta corta (univoca) ;
- a risposta ristretta (breve)
- a risposta estesa (lunga)

Il Gave precisa inoltre che alcuni item a scelta multipla, di associazione/corrispondenza possono presentarsi sotto forma di compiti di completamento (cloze). Alcuni item di risposta corta o breve possono presentarsi sotto forma di compiti di trasformazione. Questa classificazione pone l'accento in misura maggiore della precedente sui processi di risoluzione piuttosto che sui prodotti ed è quindi particolarmente adatto per analizzare i problemi delle prove stesse.

Si può quindi vedere come la preoccupazione di costruire prove che siano il più possibile "informative" di conoscenze, processi, abilità e competenze adeguando via via la classificazione sia presente in tutti gli Istituti che preparano prove di valutazione esterna per le scuole

Ritornando alla classificazione italiana possiamo anche notare come la percentuale delle risposte a scelta multipla è diminuita nelle prove nel corso degli anni ma è anche importante osservare come gli studenti italiani prediligano questa tipologia (la tanto vituperata quizzologia di alcuni critici) rispetto alle altre forme di quesito che richiedono probabilmente un impegno maggiore.(I dati relativi alle percentuali di risposte secondo le varie tipologie di prove, si possono ritrovare sempre sul rapporto sulle prove scaricabile dal sito Invalsi)

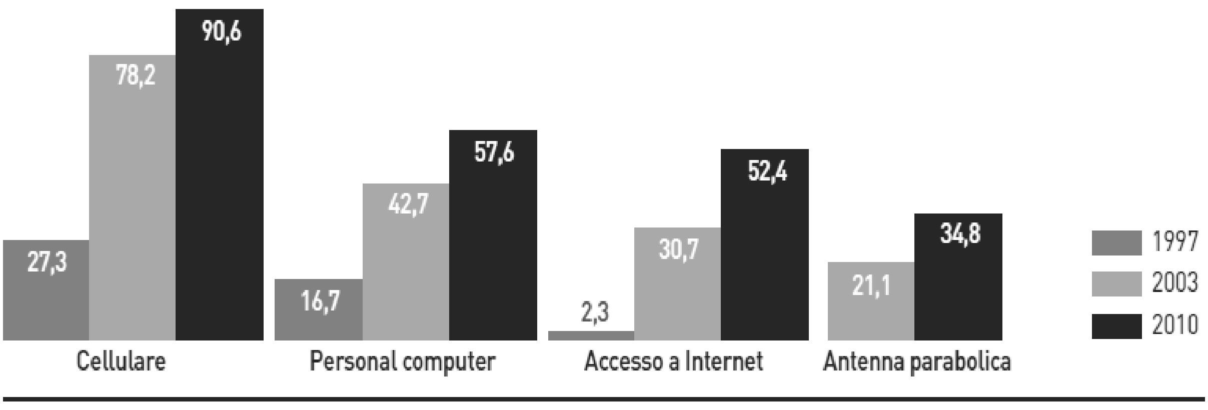
Esempi di tipologie

Analizziamo brevemente le tipologie proposte partendo da quelle a scelta multipla complessa:

A. <u>Prove a scelta multipla complessa del tipo Vero/Falso oppure Sì/No</u>

Esempio 1 (V elementare 2013)

Il grafico che vedi rappresenta il risultato (dati in percentuale) di un'indagine condotta su un campione di famiglie italiane sul possesso di alcuni beni tecnologici negli anni 1997, 2003 e 2010.



Indica se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F). Metti una crocetta per ogni riga.

		V	F
a.	Dal 2003 al 2010 la presenza del bene tecnologico che è aumentata di più è quella del cellulare	☐	☐
b.	Nel 2010 le famiglie che avevano un personal computer erano di più di quelle che avevano l'accesso a Internet	☐	☐
c.	Nel 1997 nessuna famiglia aveva un'antenna parabolica	☐	☐
d.	L'aumento della percentuale delle famiglie con l'antenna parabolica dal 2003 al 2010 è stato del 13,7%	☐	☐

Questo tipo di prova presenta alcune affermazioni relative allo stimolo/problema proposto di fronte alle quali l'allievo deve apporre un valore di verità o falsità o di sì o no. Si propongono quando non è semplice trovare distrattori credibili o, come in questo caso, quando si vuole controllare la capacità di comprensione di un testo (la frase proposta) legata alla capacità di lettura di un grafico (nei suoi aspetti puramente grafici/altezza colonne e numerici (valori riportati in cima alle colonne). Tutte queste capacità forniscono le informazioni necessarie per rispondere correttamente al quesito.
Piccola osservazione personale: forse la frase per essere davvero inequivocabile, andava precisata così : dal 2003 al 2010 la presenza del bene tecnologico che è aumentata di più *percentualmente (o in percentuale)* è quella -….. Interessante comunque che la verità/falsità della prima frase dipendeva dalla parola "aumentata" spesso trascurata in una lettura veloce del testo a "vantaggio" dell'immediatezza spesso fallace del grafico …

Esempio 2 (V elementare 2013)

. **In un supermercato si vendono sacchetti di cioccolatini di vario tipo:**

- cioccolatini alla nocciola: sacchetto da 300 g
- cioccolatini al latte: sacchetto da 300 g
- cioccolatini ripieni: sacchetto da 300 g

Ogni cioccolatino alla nocciola pesa 10 g, ogni cioccolatino al latte pesa 5 g, ogni cioccolatino ripieno pesa 15 g.
Indica se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F). Metti una crocetta per ogni riga.

		V	F
a.	Il sacchetto dei cioccolatini ripieni è quello che contiene più cioccolatini	☐	☐
b.	Il sacchetto dei cioccolatini alla nocciola contiene 30 cioccolatini	☐	☐
c.	Un sacchetto di cioccolatini al latte ne contiene il doppio di un sacchetto di cioccolatini alla nocciola	☐	☐
d.	Un sacchetto contiene solo 40 cioccolatini	☐	☐

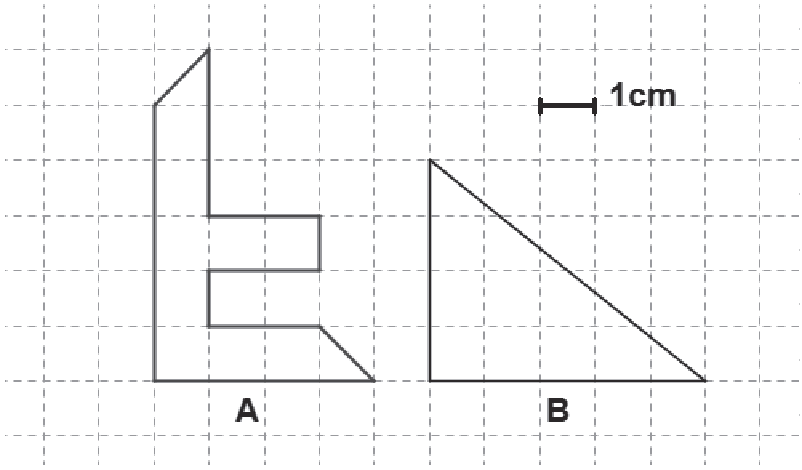
In questo caso l'alunno deve analizzare le informazioni, attuare i calcoli per poter rispondere correttamente. L'errore più comune anche qui è la superficiale lettura delle informazioni contenute nella seconda parte del problema a "vantaggio" di quelle della prima parte espresse in forma schematica e non discorsiva.

B. <u>Prove a domanda aperta a risposta univoca</u>

Queste prove si preparano quando risulta difficile trovare distrattori credibili o significativi di errori tipici.

Esempio 1 (classe V 2011)

" *Osserva le figure seguenti*"



a. *L'area di A misura* ………….. *cm2.*
b. L'area di B misura ………….. *cm2.*

Questo esempio è un semplice problema di geometria nel quale il calcolo dell'area delle due figure può essere fatto percorrendo strade diverse (per somma , per scomposizione , per sottrazione di figure di cui l'area è calcolabile). Distrattori credibili (almeno 3) sarebbero difficilmente trovabili

Esempio 2 . Classe seconda primaria 2011

Silvia vorrebbe comprare il casco da 34 euro, ma in tasca ha solo 15 euro.

Quanti euro le mancano?

Risposta: ………… euro

Questo secondo esempio appartiene ad una domanda articolata in più item (item c) ed è semplice problemino di sottrazione e sul quale sarebbe stato difficile trovare distrattori credibili al di là di quelli derivanti da errori di calcolo.

<u>C. Prove a domanda aperta a risposta articolata</u>

Per questo tipo di quesiti la Guida alla correzione dell'Invalsi aiuta gli insegnanti a valutare le possibili risposte e propone una serie di possibili risposte, giustificazioni e percorsi (in genere ricavati dalle risposte ottenute nelle prove sul campo

Esempio 1. Richiesta di descrivere un procedimento o un calcolo (RC) I media 2011

La zia Elena va in pasticceria e compra una torta al cioccolato e una torta alla panna. Il prezzo totale delle due torte è di 24 euro. La torta al cioccolato costa 6 euro in più della torta alla panna.

a. Quanto costa la torta alla panna?

Risposta: ………… euro

b. Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.

……

Questo problema ha avuto risultati particolarmente deludenti (21,2% del campione) e il gruppo di lavoro Invalsi preposto ha identificato tale cattivo risultato nella difficoltà degli alunni di modellizzare situazioni con rappresentazioni e disegni. La richiesta della strategia risolutiva ha avuto quasi il 18 % di esito positivo. Il gruppo di lavoro così commenta nei quaderni di lavoro presenti nel sito Invalsi[2]

"Il quesito richiede di saper risolvere semplici situazioni problematiche (coinvolgendo i numeri sono interi e minori di trenta) mantenendo il controllo sia sui risultati che sui processi risolutivi.

---

[2] Quaderni SNV – N. 2/2012 MAT a cura di Stefania Cotoneschi, Franca Ferri, Ketty Savioli

Dall'analisi dei protocolli si evince che gli alunni abituati ad argomentare non si limitano ai calcoli, ma tendono a produrre un testo organizzato e strutturato (che diventa quasi un "canovaccio metacognitivo" del procedimento risolutivo seguito e dunque strumento davvero prezioso e potente per il controllo del risultato). Sono interessanti le diverse strategie risolutive.

Protocollo n.1
Ho fatto 24:2=12 euro che costerebbe ogni torta se valessero uguali. Dopo avere fatto questo calcolo ho aggiunto 3 euro alla torta al cioccolato (12+3=15) e ho sottratto 3 euro dalla torta alla panna (12-3=9). In questo modo ci sono 6 euro di differenza.

Protocollo n. 2
Bastava fare: 24-6=18 (6 sono gli euro in più della torta al cioccolato), 18:2=9 euro costo della torta alla panna (2 sono le torte).

Protocollo n. 3
Se la torta al cioccolato costa 6 € in più, ho fatto 24-6=18, poi ho fatto 18:2=9, e visto che una torta costa 6 € in più ho fatto 9+6=15 € torta al cioccolato e 9 € torta alla panna.

In alcuni casi si è potuto osservare che gli alunni hanno proceduto per tentativi, senza esplicitarli (lavoro considerato incompleto); non è "sbagliato" ma denota una necessità di essere ancora "educati" alla comunicazione e all'argomentazione (a questo proposito risulta essere significativo il dato delle omissioni: 7,1%)

Protocollo n. 4
Fa 9 euro. Ho cercato 2 numeri che sommati potessero dare come risultato 24 euro.
L'errore più comune è stato quello di dividere 24 per due, per ottenere il prezzo della torta alla panna (12 euro) e poi aggiungere 6 per scoprire il prezzo della torta al cioccolato (18 euro). Il controllo dei risultati (incoerenti rispetto alla situazione originale perchè 18+12=30 e non 24) avrebbe potuto contenere l'errore.
Una variante ulteriore a questo tipo di errore in cui ora la differenza tra le due torte è di 12 euro...

Protocollo n. 5
Se le due torte insieme costano 24, la metà è 12, solo che dato che quella al cioccolato costa 6 euro in più, costa 18 euro e la torta alla panna costa 6 euro.
Analogamente alcuni alunni hanno cercato la metà di 24 e successivamente hanno calcolato una sottrazione (12-6) per trovare il prezzo della torta alla panna (6 euro). Anche in questo caso il controllo sulla coerenza del risultato avrebbe potuto individuare l'errore. Spesso però gli alunni non sono abituati a rileggere il testo per controllare che la soluzione trovata soddisfi tutte le condizioni che il testo stesso pone.
Ci sono dei casi in cui la codifica corretta del testo e delle variabili ad esso associate ha indotto qualche alunno in errore. L'avvio del procedimento è corretto, l'alunno ha poi perso il controllo del testo (confusione torta panna/cioccolato)."

Esempio 2. Richiesta di riportare i calcoli (RC) V primaria 2011

D23. Carla ha deciso di recarsi in Inghilterra per un periodo di sei mesi. Prima di partire cambia 2 000 euro in sterline inglesi.
In banca il cambio tra euro e sterlina è: 1 euro = 0,95 sterline.
Quante sterline riceve Carla?
Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

....

....

....

Risultato: .... sterline

In questo problema si è usata la formulazione di richiedere prima i calcoli e poi di scrivere il risultato (modalità spesso usata nelle prove Timms).

Esempio 3 : Richiesta di giustificare una scelta operata I media 2011

D25. Roberto pensa a un numero intero e lo triplica.

a. Quale di questi numeri NON può essere certamente il risultato dell'operazione?

☐ A. 150

☐ B. 126

☐ C. 75

☐ D. 55

b. Giustifica la tua risposta.

....

....

....

....

L'alunno deve riportare la strategia che lo ha portato a scegliere nella risposta multipla quindi esporre il ragionamento compiuto.

Esempio 4.Richiesta di riportare il procedimento (RC) I media 2012

D28. **In un negozio di articoli per la casa, si vendono un contenitore con due mestoli che costa 19 euro e un altro contenitore uguale al primo, ma con tre mestoli, che costa 23 euro.**

19 euro

23 euro

a. **Qual è il costo del <u>solo</u> contenitore?**

A. ☐ 4 euro

B. ☐ 8,50 euro

C. ☐ 11 euro

D. ☐ 15 euro

b. **Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.**

....

....

....

La richiesta è simile a quella della domanda dell'esempio 3 e l'alunno dovrà esplicitare il percorso attuato . Interessanti i protocolli riportati nel quaderno di nota 1

Esempio5: Richiesta di giustificazione di una scelta (RG) V primaria 2013

Alice è andata a fare una gita in pullman con la sua famiglia. Si trovano davanti a un sottopasso ferroviario con il seguente cartello:

Modello	Super comfort
Dimensioni	Lunghezza:11 990 mm
	Larghezza: 2 550 mm
	Altezza: 3 830 mm
Lunghezza corridoio	7 500 mm
Distanza sedili	390 mm

Il pullman potrà passare attraverso il sottopasso ferroviario?
□ Sì, il pullman potrà passare perché ……………………………………………………..
□ No, il pullman non potrà passare perché ……………………………………………..

Nel quesito l'alunno dovrà argomentare la scelta fatta . Questi quesiti sono particolarmente utili perché forniscono i ragionamenti eseguiti dagli alunni per arrivare ad una affermazione ed educano ad un approccio riflettuto alla soluzione dei problemi.

D: Tipologia Cloze (chiudere)

La tipologia Cloze chiede agli alunni di chiudere delle frasi lasciate aperte operando, come in questo esempio, una scelta dei due numeri tra i quattro proposti da mettere " al posto giusto" affinché la frase risulti vera. In altri casi l'alunno dovrà ricavare gli elementi di "riempimento " da sostituire ai puntini al posto giusto da grafici , tabelle o altre informazioni ricavabili dal testo.

Esempio 1. classe II 2012

D16. Osserva i seguenti numeri:

$\boxed{6}$ $\boxed{8}$ $\boxed{10}$ $\boxed{14}$

Due di questi numeri completano correttamente il problema che segue. Scrivili al posto dei puntini.

Mario ha .... figurine. Regala a Bruno .... figurine. Ora a Mario restano 6 figurine.

Prove Invalsi: elementi critici emersi dagli esiti…

Per esaminare accuratamente le caratteristiche delle prove e gli esiti è particolarmente utile leggere le guide alla correzione e i quaderni già citati che si trovano sul sito dell'Invalsi.[3]
Le prove sono state raggruppate dal Sevizio Nazionale di Valutazione dell'Invalsi SNV in 4 macro-aree proprie (anche se non esclusive) della matematica:

1. Concetti e procedure;
2. Rappresentazioni;
3. Modellizzazione
4. Argomentazione

- [3] http://www.invalsi.it/snvpn2013/index.php?action=quadernisnv

L'analisi dei gruppi di lavoro in questi quaderni è stata compiuta per tali macro aree e per gli ambiti di contenuto previsti dal Quadro di Riferimento dell'Invalsi.
Osservando il complesso delle prove (anche quelle di Lingua Italiana) si possono osservare delle criticità più generali che riguardano tutte le materie; da ciò può nascere un progetto di Piano dell'Offerta Formativa da parte delle scuole che faccia leva in tutte le discipline con attività che tendano a superare i punti di criticità osservati. Nei paragrafi successivi analizzeremo alcuni aspetti non trattati nei quaderni in oggetto ai quali rimandiamo i lettori.

Comprensione del testo

Le criticità più generali osservate in matematica e che comunque riguardano tutte le materie sono legate a

1. Capacità di comprensione del testo intesa nei suoi vari aspetti di comprensione letterale, grafica e simbolica e di identificazione dello scopo del quesito
2. Capacità di identificare gli impliciti –verbali , simbolici o grafici-presenti nella domanda
3. Capacità di ragionamento intesa prioritariamente come capacità di argomentare correttamente

Queste criticità fanno emergere difficoltà legate a fattori trasversali quali :

- Gestione dei diversi registri di rappresentazione
- Lettura "compresa" dei testi
- Interpretazioni dei dati
- Uso del linguaggio
- Significato dei simboli
- ……

E quindi il superamento di tali criticità non può essere correttamente affidato aisoli insegnanti disciplinari.

La comprensione globale nella lettura di un item richiede che si riconosca sinteticamente lo scopo del testo (che cosa vuole la domanda), tale scopo può essere esplicito e visibile dai dati espressi , ma talvolta dipende anche da informazioni che sembrano secondarie o che sono addirittura implicite.

Allora comprensione del testo significa anche : identificare lo scopo della domanda, identificare dati espliciti ed impliciti e passare alla "traduzione" matematica per esempio da registro narrativo a quello simbolico o grafico o viceversa se il testo è simbolico/grafico può essere richiesto il passaggio al registro narrativo (specie nelle domande Cloze) .

L'analisi critica delle prove Invalsi potrà così portare il docente ad attivare un percorso che incrementi le abilità e le competenze più generali, che interessano il complesso delle materie e molteplici attività scolastiche. È quindi importante non addestrare ai test proponendo una batteria di quesiti del tipo di quelli più errati nell'anno precedente, ma formare la competenze generali che permettono di rispondere correttamente ai quesiti stessi e che comunque siano coerenti con le finalità della scuola (che non è certo quella di produrre scimmie ammaestrate!) .

Osserviamo ora alcuni quesiti per vedere cosa implicava la risposta corretta:

Esempio1. II Primaria 2012

Osserva l'operazione:

7 + 7 + 6 =

Quale tra i seguenti problemi si può risolvere con l'operazione nel riquadro?

A. ☐ Mattia ha 7 figurine e Giorgio ha 6 figurine. Quante figurine hanno insieme Mattia e Giorgio?

B. ☐ Mattia ha 7 figurine e Giorgio ha 6 figurine in più di Mattia. Quante figurine hanno insieme Mattia e Giorgio?

C. ☐ Mattia ha 7 figurine e Giorgio ha 6 figurine. Quante figurine ha Mattia in più di Giorgio?

.

La finalità del quesito era quella di indagare sulla capacità di dare un senso ad una addizione abbinandola ad una situazione problematica adatta. L'alunno doveva quindi identificare lo scopo, l'implicito legato alla locuzione "in più" e passare dal registro narrativo a quello simbolico e viceversa. L'esitocorretto del campione nazionale è stato solo pari al 43% .

Esempio2. II Primaria 2012

Il papà di Luca compie 43 anni.
Luca va al supermercato a comprare le candeline per la torta.
Al supermercato vendono solo sacchetti da 10 candeline.
Quanti sacchetti deve comprare Luca?

A. ☐ 5

B. ☐ 4

C. ☐ 3

Questo sembra esser un semplice problemino facilitato (o no?) dalla risposta multipla Gli alunni dovevano individuare l'informazione implicita cioè che i sacchetti non sono frazionabili e quindi comprendere che acquistare 4 sacchetti non bastavano per le candeline ; ben il 38% del campione ha risposto 4 e c'è da meditare…

Esempio3. III Media 2012

La famigerata "Talpa" che ha mangiato più del 50% degli alunni! (Risultati corretti43,1%)

Per scavare le gallerie di una linea della metropolitana si fa uso di una macchina cilindrica che sposta la terra, come quella che vedi in figura. La galleria che la macchina riesce a scavare ha un diametro di 6,80 m. Oggi la macchina ha scavato un tratto lungo 10 metri.

a. Il volume di terra che è stato rimosso è

A. ☐ circa 70 m^3

B. ☐ circa 120 m^3

C. ☐ circa 360 m^3

D. ☐ circa 470 m^3

b. Ieri la macchina ha spostato circa 250 m^3 di terra. La densità della terra spostata è circa 1 800 kg/m^3. Quanto pesa la terra che la macchina ha spostato ieri?

Risposta: circa ……………………………… kg

Esaminiamo il problema che non sembrava, a prima vista particolarmente complicato. Si richiede all'alunno la lettura di un brano in lingua italiana, dal quale deve identificare lo scopo, ricavare i dati espliciti ed impliciti e passare da un contesto concreto ad una "modellizzazione geometrica" che permetta di rispondere al problema scegliendo la risposta corretta. La modellizzazione geometrica era favorita dalla foto di un'autentica « Talpa» che presentava le caratteristiche di "cilindro" citate nel testo italiano. E di cilindri in terza media ne vedono tanti! Probabilmente come ben osserva F. Brunelli[4] la frequente prassi scolastica di partire da problemi in qualche modo già "matematizzati", dove è già esplicitata o ben descritta la figura geometrica ha fatto sì che gli esiti non fossero positivi. C'erano due impliciti da cogliere il termine "cilindrica" e il fatto che , essendo un problema concreto π doveva essere stato calcolato approssimato e non lasciato indicato . Difatti Brunelli prosegue riportando le giustificazioni dei suoi alunni " un altro ragazzo pure bravino mi ha detto: "Di solito nella misura del volume del cilindro c'è il π. Tra le soluzioni proposte dal quesito il π mancava e questo mi ha disorientato, per questo ho scelto 120 m^3." Gli allievi dal canto loro sono abituati a una certa "frettolosità"; vogliono capire subito quale formula applicare per risolvere il problema; non hanno la pazienza di leggere, rileggere e riflettere sul testo di un quesito. Pensare "fa fatica", come dicono in Toscana!"

[4] F.Brunelli " Lettera all'Unione Matematica Italiana"

Argomentare

Altro punto critico che emerge dagli esiti Invalsi è la (scarsa) capacità di argomentare

Le prove peraltro presentano (anche se in modo implicito) un percorso che porta alla argomentazione corretta da parte dell'alunno .Vi sono infatti quesiti che chiedono di

1. **Scegliere (Giudicare)** tra argomentazioni diverse prodotte da altri
2. **Giustificare un sì o un no** argomentandolo
3. **Produrre** una risposta e argomentarla

Questo percorso sull'argomentazione mi sembra molto fruibile dagli insegnanti in classe che, inoltre, potranno sostituire la scelta argomentazioni proposte con frasi già predisposte alla scelta tra argomentazioni che scaturiscono dalla discussione di classe su un certo argomento.

1. **Scegliere** tra argomentazioni diverse prodotte da altri **Esempio 1. I media 2012:**

Giudicare un'argomentazione e anche quali impliciti sono presenti nelle risposte
:

D24. L'insegnante chiede ai suoi alunni: un triangolo equilatero e un quadrato possono avere lo stesso perimetro?

- Anna risponde: No. Infatti il triangolo ha tre lati e il quadrato ne ha quattro.
- Luigi risponde: No. Infatti un quadrato è sempre più grande di un triangolo.
- Ugo risponde: Sì. Quando succede i lati del triangolo sono più lunghi di quelli del quadrato.
- Fabiana risponde: Sì. Quando succede il lato del triangolo è uguale a quello del quadrato.

Chi ha ragione?

A. ☐ Anna

B. ☐ Luigi

C. ☐ Ugo

D. ☐ Fabiana

La risposta di Anna sottende l'implicito (erroneo perchè non contenuto nella domanda) che la lunghezza dei lati debba essere la stessa per le due figure quindi chi ne ha tre non può essere uguale alla figura che ne ha quattro. Anche la risposta di Luigi si rifà alla stessa intuizione quanti più lati ho tanto più grande è il poligono. L'argomentazione di Fabiana è invece più legata ad una scorretta" visualizzazione della lunghezza dei lati" più che al loro numero.

Esempio2. II Primaria 2012

D17. Osserva il riquadro:

$$\boxed{12 \times 3 = 12 + 12 + 12}$$

Quello che è scritto nel riquadro è corretto?

☐ A. No, perché il risultato di 12×3 non è 12

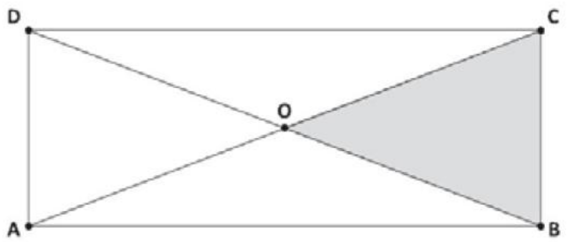
☐ B. Sì, perché moltiplicare 12 per 3 è come sommare 12 tre volte

☐ C. No, perché da una parte c'è il segno $\times$ e dall'altra il segno +

In questo caso la difficoltà a scegliere l'argomentazione corretta è legata al significato del simbolo uguale che viene inteso (per abitudine?) solo come risultato.

Esempio 3. III media 2012

E6. In figura è rappresentato il rettangolo ABCD con le sue diagonali. Se conosci l'area del rettangolo, puoi calcolare l'area del triangolo in grigio?



A. ☐ No, perché i quattro triangoli di vertice O non sono tutti uguali fra loro

B. ☐ No, perché non conosco le dimensioni del rettangolo

C. ☐ Sì, perché i quattro triangoli di vertice O sono equivalenti

D. ☐ Sì, perché i quattro triangoli di vertice O sono isosceli

---

Abbastanza semplice l'analisi delle argomentazioni che possono essere state scelte dagli alunni.

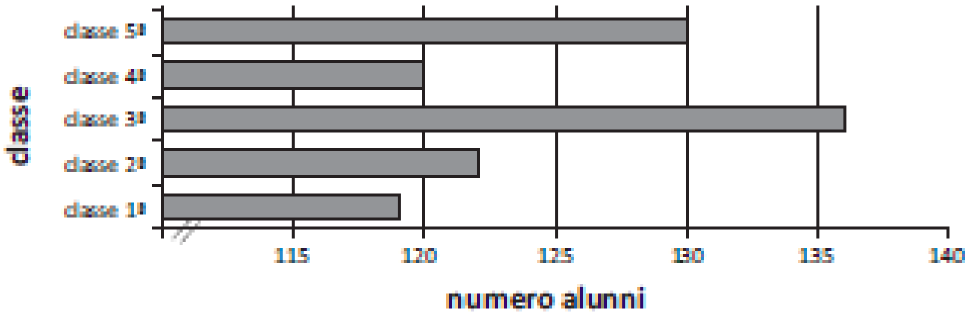
2. Rispondere sì o no e GIUSTIFICARE la risposta

La richiesta di giustificare una risposta o una scelta (Sì perché … No perché …) fa riferimento a c competenze "innovative" esplicitamente indicate sia nei traguardi per lo sviluppo delle competenze (Indicazioni per il curricolo 2007-2012) sia nelle Indicazioni nazionali per il secondo ciclo.

Esempio 1. V Primaria 2012

D9. **Il grafico rappresenta il numero di alunni per classe della scuola "Don Milani".**

Alunni della Scuola Primaria "Don Milani"



Giovanni, osservando il grafico, afferma che gli alunni della classe 5ª sono il doppio di quelli della classe 4ª.
Giovanni ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

☐ **Sì, perché** ....

....

....

☐ **No, perché** ....

....

....

A questo quesito ha risposto correttamente il 39,3% del campione rappresentativo degli alunni.
Dove risiedono le difficoltà?
In termini di comprensione del testo il quesito richiedeva solo la capacità di riconoscere il termine « doppio» ma in una V primaria sia dall'esperienza dei docenti che da esiti di prove centrate sul termine stesso risulta essere compreso in modo inequivocabile.
La vera difficoltà consisteva nel fatto che **<u>il registro grafico non corrisponde a quello verbale</u>.**
Nel registro grafico i due segmenti che indicano l'interruzione dell'asse non vengono facilmente **notati e interpretati** e quindi la verità o la falsità della frase può essere ricavata dalla lettura dei numeri e non dall'impressione immediata del grafico. Gli alunni poi mantengono, anche in questa prova, la caratteristica , in presenza di un grafico, di privilegiare il grafico e non leggere i numeri che corrispondono dando ragione allo statistico che affermava " Un'immagine mente più di mille numeri!".

Il punto 3 cioè la produzione di argomentazioni corrette non è ancora presente in misura significativa nelle prove (c'è qualcosa in seconda superiore) perché prima devono essere ben esperiti i punti precedenti.