

Soluzioni dei test della fascia 15-16 – finale 2012

Soluzione del test 1 - Ricoprimenti

I ricoprimenti minimi del grafo completo su n vertici sono tutti e soli gli insiemi formati da $n-1$ vertici.

Soluzione del test 2 - La slot machine asimmetrica

Dopo n giocate, la prima ruota si sarà spostata, in senso orario, di n posizioni (settori) in senso orario, la seconda di n posizioni in senso antiorario. Se si numerano i settori di ciascuna ruota in senso orario, partendo da quello rosso (a cui viene assegnato il numero 0), nella posizione iniziale i due settori visualizzati corrispondono entrambi al numero 1. Dopo n giocate, sarà visualizzato il settore della prima ruota il cui numero è il resto della divisione di $n+1$ per 24, mentre il numero del settore della seconda ruota sarà il resto della divisione di $1-n$ per 119. I due settori recheranno entrambi il numero 0 (quello corrispondente al rosso) se e solo se entrambi i resti saranno uguali a 0, ossia e solo se saranno verificate entrambe le seguenti condizioni:

- (i) 24 è un divisore di $n+1$;
- (ii) 119 è un divisore di $1-n$ (equivalentemente, 119 è un divisore di $n-1$).

In virtù della condizione (i), il numero cercato n deve essere dispari, e quindi $n-1$ è pari. Il più piccolo multiplo positivo pari di 119 è $2 \cdot 119 = 238$. Se $n-1 = 238$, allora $n+1 = 240$, che è divisibile per 24. Quindi $n = 239$ è il numero cercato.

Soluzione del test 3- Aritmetica strana

0 è elemento neutro per la moltiplicazione, ∞ è elemento neutro per l'addizione.

La condizione per definire una operazione di sottrazione è:

“per ogni scelta di a e b in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ esiste x in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tale che $a = x \oplus b$ ”.

Ciò significa che $\min\{x, b\} = a$. Ma $7 = x \oplus 3$ non ha soluzione.

Soluzioni dei test della fascia 17-18 - finale 2012

Soluzione del test 1 -Un grafo e i suoi vertici

Nel grafo assegnato, ogni vertice terminale è collegato da un arco ad un vertice non terminale (che è necessariamente unico, poiché, per definizione, tale è l'arco). Viceversa, ogni vertice non terminale è collegato per ipotesi ad un solo vertice terminale. Dunque il numero n dei vertici non terminali è uguale al numero dei vertici terminali, e pertanto il numero complessivo dei vertici è $2n$. L'insieme dei vertici non terminali è un ricoprimento del grafo.

Soluzione del test 2 – La slot machine a colori

La vincita associata ad un colore sarà tanto più alta quanta minore è la probabilità che vengano visualizzati due settori di quel colore. Le probabilità che un certo colore venga visualizzato nella prima ruota, nella seconda ruota e in entrambe le ruote sono riportate nella tabella seguente.

Colore	Probabilità per la prima ruota	Probabilità per la seconda ruota	Probabilità per entrambe le ruote
rosso	$\frac{3}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{21}{441}$
verde	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{6}{441}$
blu	$\frac{6}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{6}{441}$
giallo	$\frac{7}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{28}{441}$
nero	$\frac{2}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{14}{441}$

La vincita maggiore spetta al verde e al blu. Le altre vincite spettano, nell'ordine, al nero, al rosso e al giallo.

Soluzione del test 3 – Aritmetica strana

L'elemento neutro per la moltiplicazione è lo zero.

$$(x \oplus y)^0 = 0$$

$$(x \oplus y)^1 = 0x \oplus 0y$$

$$(x \oplus y)^2 = (x \oplus y) \otimes (x \oplus y) = x^2 \oplus (x \otimes y) \oplus (y \otimes x) \oplus y^2 = x^2 \oplus (x \otimes y) \oplus y^2$$

$$(x \oplus y)^3 = (x^2 \oplus (x \otimes y) \oplus y^2) \otimes (x \oplus y) = x^3 \oplus (x^2 \otimes y) \oplus (x \otimes y^2) \oplus y^3$$

Il triangolo è quindi formato da elementi tutti uguali allo zero:

```

0
0 0
0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0 0
.....

```